פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

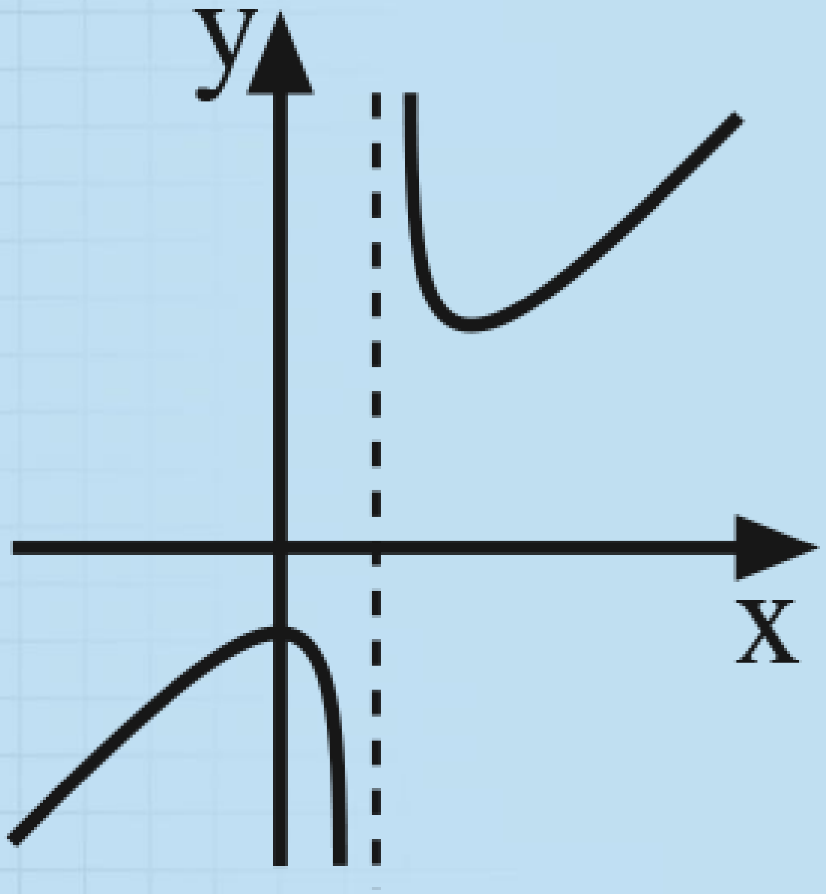
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 83, ת. 2

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

2) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ה. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה-x.

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

ז. מעבירים בכל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה משיק לגרף הפונקציה. מהו המרחק בין שני המשיקים?

ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

י. מצא, עפ"י הגרף של הפונקציה $f'(x)$, את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f''(x)$.

יא. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

יב. שרטט בצורה כללית את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$?

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה. $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

תחום הגדרה: $1 - x \neq 0$

$1 \neq x$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

נדרוש: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = 1 - \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{(1-x)^2 - 1}{(1-x)^2} = \frac{-2x + x^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(1-x)^2} = 0$$

$x = 0$ $\quad\quad$ $x = 2$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(x^2 - 2x)' = 2x - 2$$

עבור $x = 0$ נקודת מקסימום $\quad 2 \cdot 0 - 2 < 0 \quad x = 0$

עבור $x = 2$ נקודת מינימום $\quad 2 \cdot 2 - 2 > 0 \quad x = 2$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

נמצא את שיעור ה- y של נקודות הקיצון ע״י הצבה בפונקציה:

$$f(0) = 0 - \frac{1}{1-0} = -1$$

נקודת מקסימום $(0,-1)$

$$f(2) = 2 - \frac{1}{1-2} = 3$$

נקודת מינימום $(2,3)$

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ"י סימן הנגזרת הראשונה

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(1-x)^2} = 0$$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי לכל x מוגדר
ולכן סימן הנגזרת הראשונה יקבע עפ"י המונה בלבד

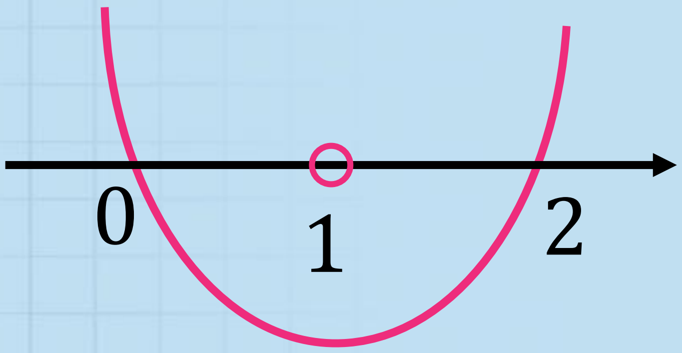
הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0\ ,2$

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0, 2$

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq 1$



הנגזרת הראשונה $f'(x)$

חיובית בתחום $2 < x$ או $x < 0$

ושלילית בתחום $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$

הפונקציה $f(x)$

עולה בתחום $2 < x$ או $x < 0$

ויורדת בתחום $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$$f(0) = 0 - \frac{1}{1-0} = -1$$

$(0, -1)$

ה. מצא את האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה-x. $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.

פתרון

$$f(x) = \frac{x - x^2 - 1}{1 - x} = \frac{-x^2 + x - 1}{1 - x}$$

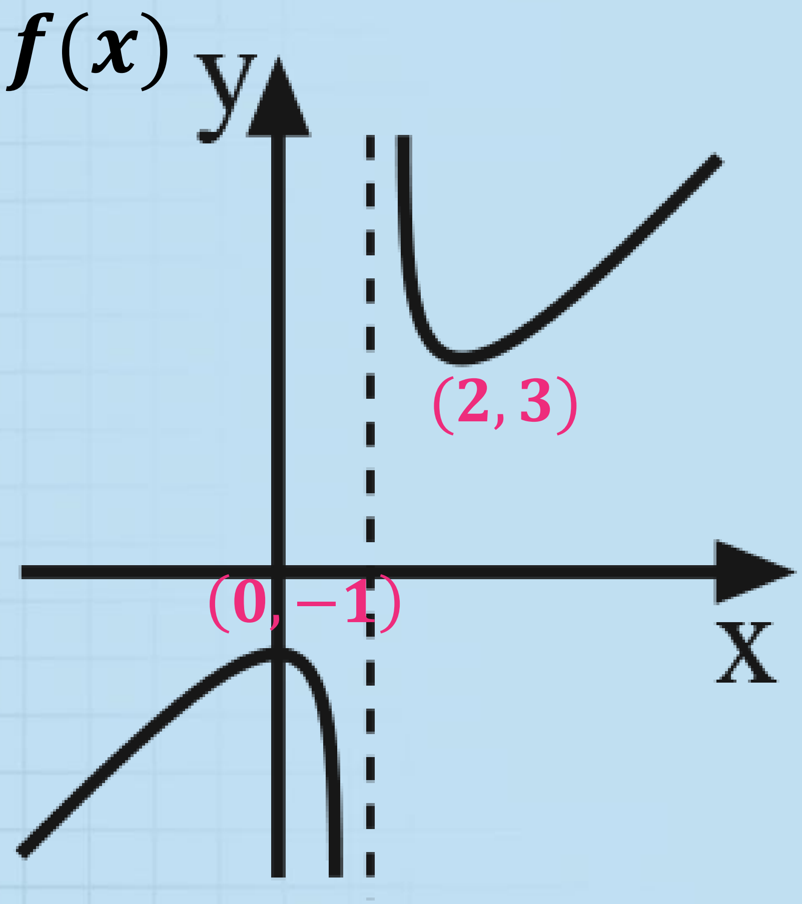
הערך $x = 1$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $-1 + 1 - 1 = -1$

$$\Downarrow$$

הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר x של הפונקציה

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון



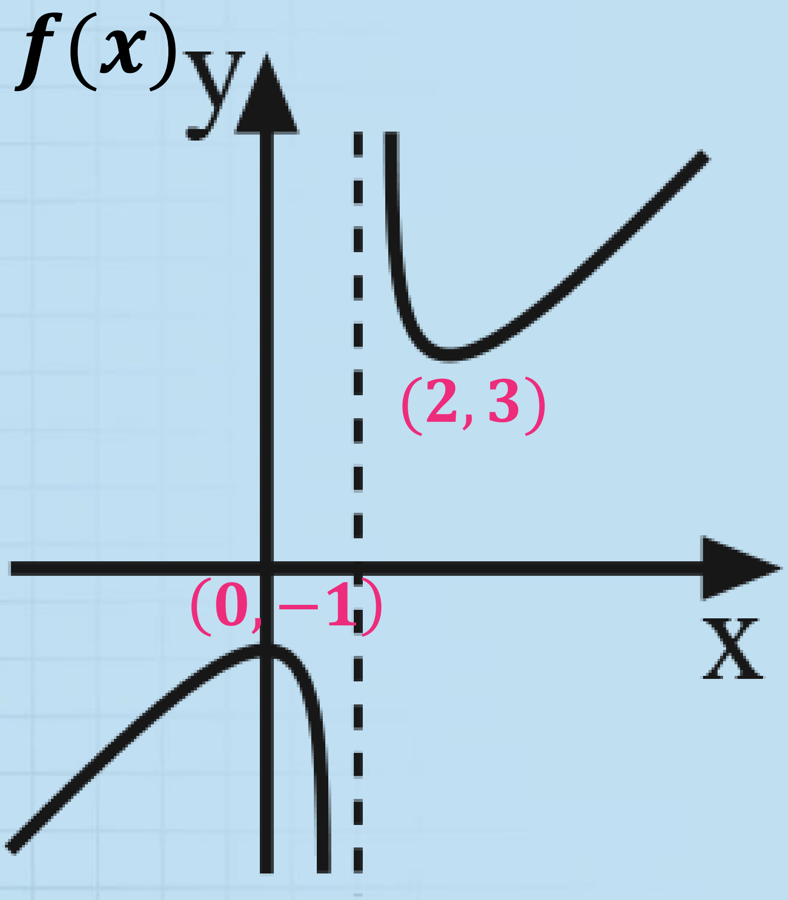
נפתור את השאלה גרפית,
עפ״י גרף הפונקציה $f(x)$

חיתוך בנקודה אחת יתקבל רק
בשיעור ה- y של נקודות הקיצון

(1) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת עבור $k = -1,3$

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$.
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון



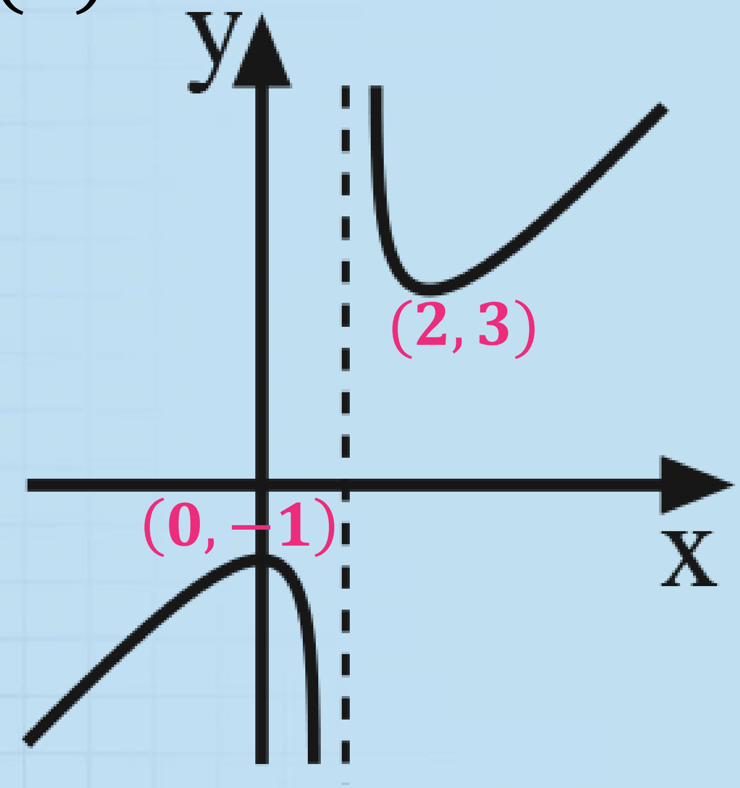
נפתור את השאלה גרפית,
עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$

(2) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות עבור
$k > 3$ או $k < -1$

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{1-x}$:
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

$f(x)$

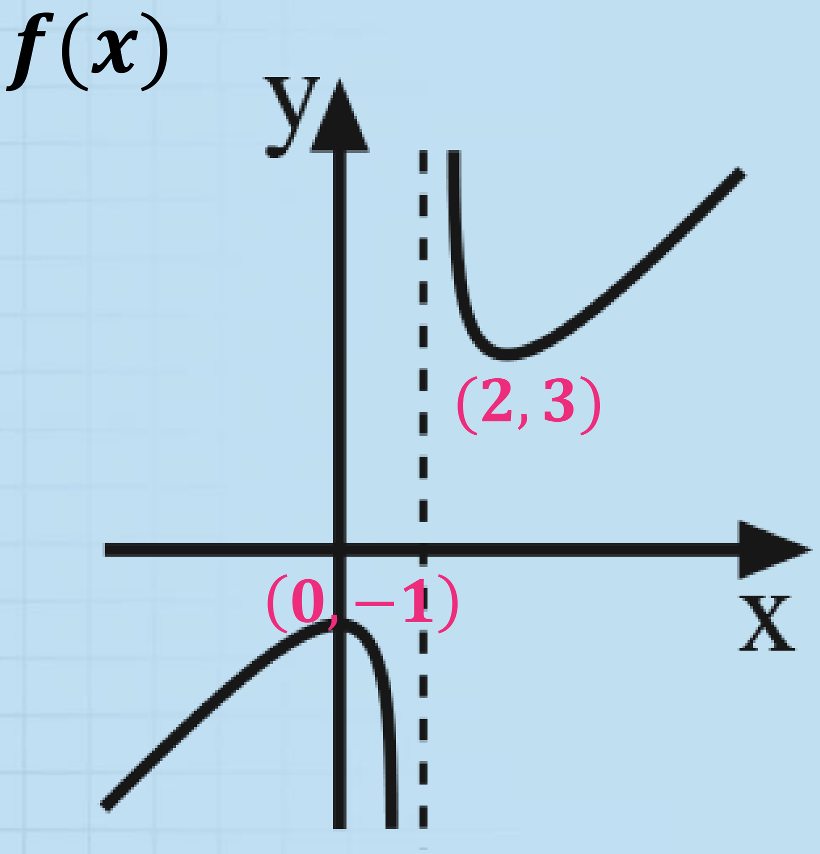


נפתור את השאלה גרפית,
עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$

(3) הישר $y = k$ לא יחתוך את גרף הפונקציה עבור $-1 < k < 3$

ז. מעבירים בכל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה משיק לגרף הפונקציה. מהו המרחק בין שני המשיקים?

פתרון



עפ"י הסרטוט, המשיקים יהיו

$y=3$ ו- $y=-1$

המרחק ביניהם $\mathbf{3-(-1)=4}$

ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$$

הערך $x=1$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $1-2=-1$

$$\Downarrow$$

הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר x של $f'(x)$

ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(1-x)^2}=\frac{x^2-2x}{1-2x+x^2}$$

גם במונה וגם במכנה אותה חזקה מובילה, x^2, האסימפטוטה האופקית

לפונקציה תהיה מנת המקדמים: $y=\frac{1}{1}$

$$\Downarrow$$

הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר y של $f'(x)$

ט. שרטט בצורה כללית, עפ״י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$
אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון

ל- $f(x)$ נקודות קיצון עבור $x = 0,2$

$$\Downarrow$$

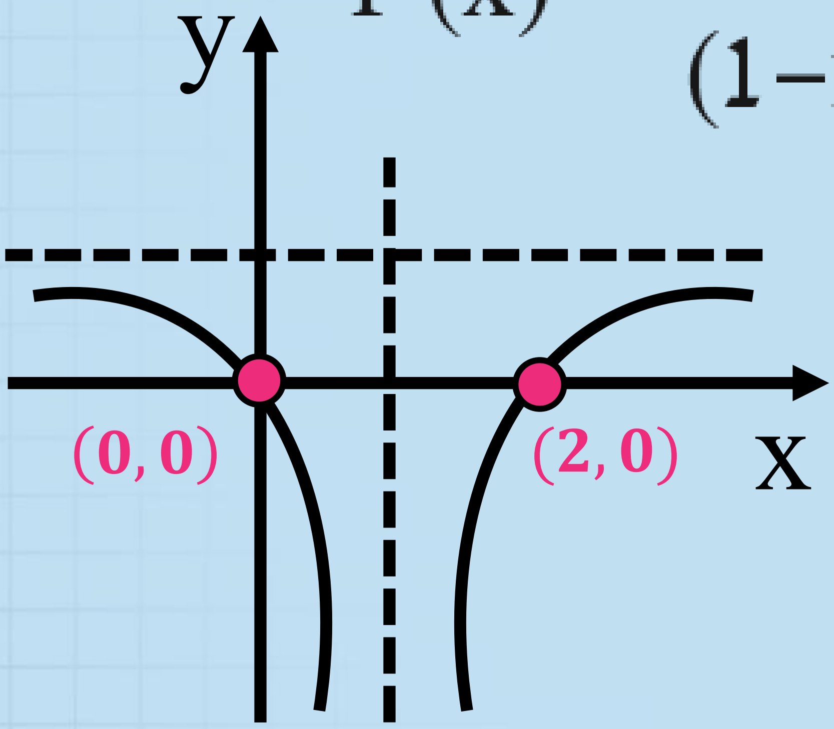
$$f'(0) = f'(2) = 0$$

הנגזרת הראשונה $f'(x)$
חיובית בתחום $x > 2$ או $x < 0$
ושלילית בתחום $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$

ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$$



אסימפטוטות מאונכות לצירים:

$x = 1$ ו- $y = 1$

ל- $f(x)$ אין נקודות פיתול

$\Downarrow$

ל- $f'(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות

י. מצא, עפ"י הגרף של הפונקציה $f'(x)$, את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f''(x)$.

פתרון

$f'(x)$ עולה בתחום $x < 1$ ויורדת בתחום $1 < x$

$$\Downarrow$$

$f''(x)$ חיובית בתחום $x < 1$ ושלילית בתחום $1 < x$

יא. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

פתרון

$f'(x)$ חיובית בתחום $2 < x$ או $x < 0$

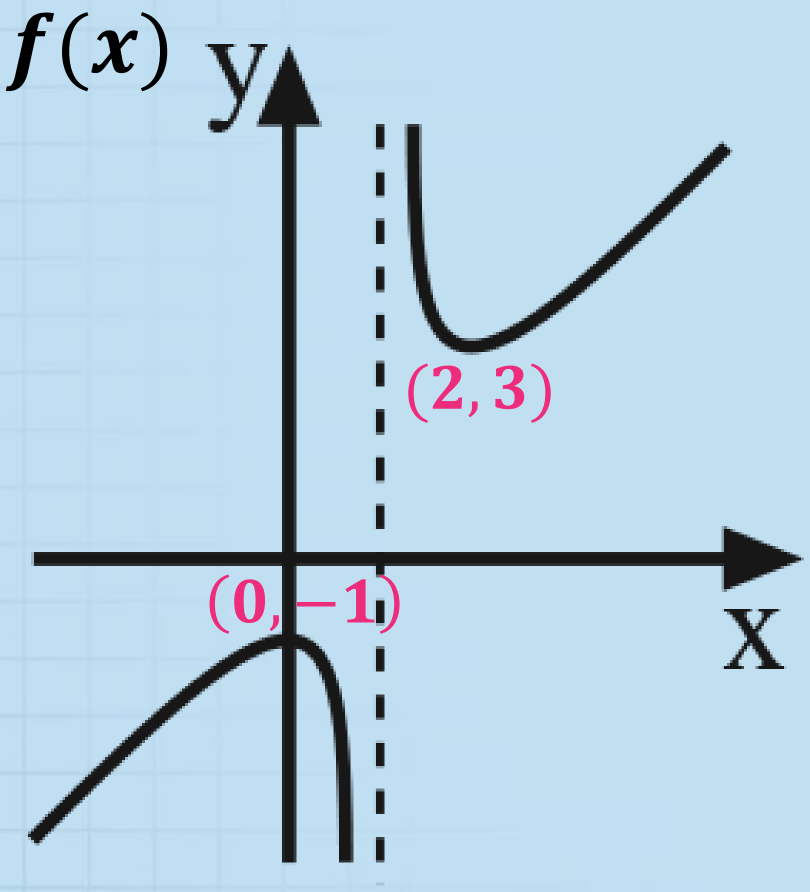
$f''(x)$ חיובית בתחום $1 < x$

$$\Downarrow$$

שתי הפונקציות חיוביות בתחום $2 < x$

יב. שרטט בצורה כללית את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$?

פתרון

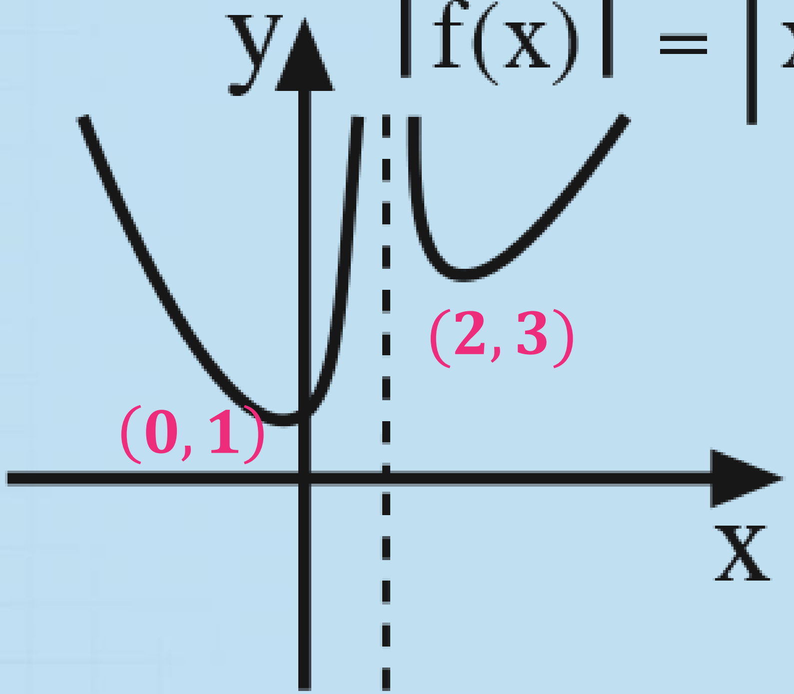


$|f(x)|$ היא פונקציה אי שלילית
נסרטט את החלק השלילי של
הפונקציה $f(x)$ כתמונת מראה,
בחלק החיובי של ציר y

יב. שרטט בצורה כללית את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$?

פתרון

$$|f(x)| = \left|x - \frac{1}{1-x}\right|$$



$(0,1)$ נקודת מינימום

$(2,3)$ נקודת מינימום

בהצלחה