תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 79–81, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ו. שרטט את גרף הפונקציה.

ז. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$? נמק.

ח. בהסתמך על הגרף של $f(x)$ שרטט בצורה כללית את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

א. **תחום הגדרה** – המכנה שווה לאפס כאשר $x = 0$

ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0, נקבל:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot x^2 - (1-x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = 0.$$

תרגיל לדוגמה

ב. נקודות קיצון

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{x^4}$$

$$x^2-2x = 0$$

$$\cancel{x_1 = 0}, \quad x_2 = 2.$$

$$x \neq 0$$

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי:

$$(x^2 - 2x)' = 2x-2$$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

ב. נקודות קיצון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הביטוי:

$$(x^2 - 2x)' = 2x - 2$$

אם נציב $x = 2$ בנגזרת זו נקבל $2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$

ב-$x = 2$ יש מינימום.

$$y = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

$(2, -\frac{1}{4})$ והיא נקודת מינימום.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{x^4}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי.

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0\,,2$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{x^4}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה**

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0\,,2$

הנגזרת הראשונה חיובית בתחום $x < 0$ או $x > 2$
ושלילית בתחום $0 < x < 2$

הפונקציה עולה בתחום $x < 0$ או $x > 2$ ויורדת בתחום $0 < x < 2$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

ד. נקודות חיתוך עם הצירים

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ - אין חיתוך עם ציר y

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$\frac{1-x}{x^2} = 0$$

$$\mathbf{x = 1}$$

(1 ,0).

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

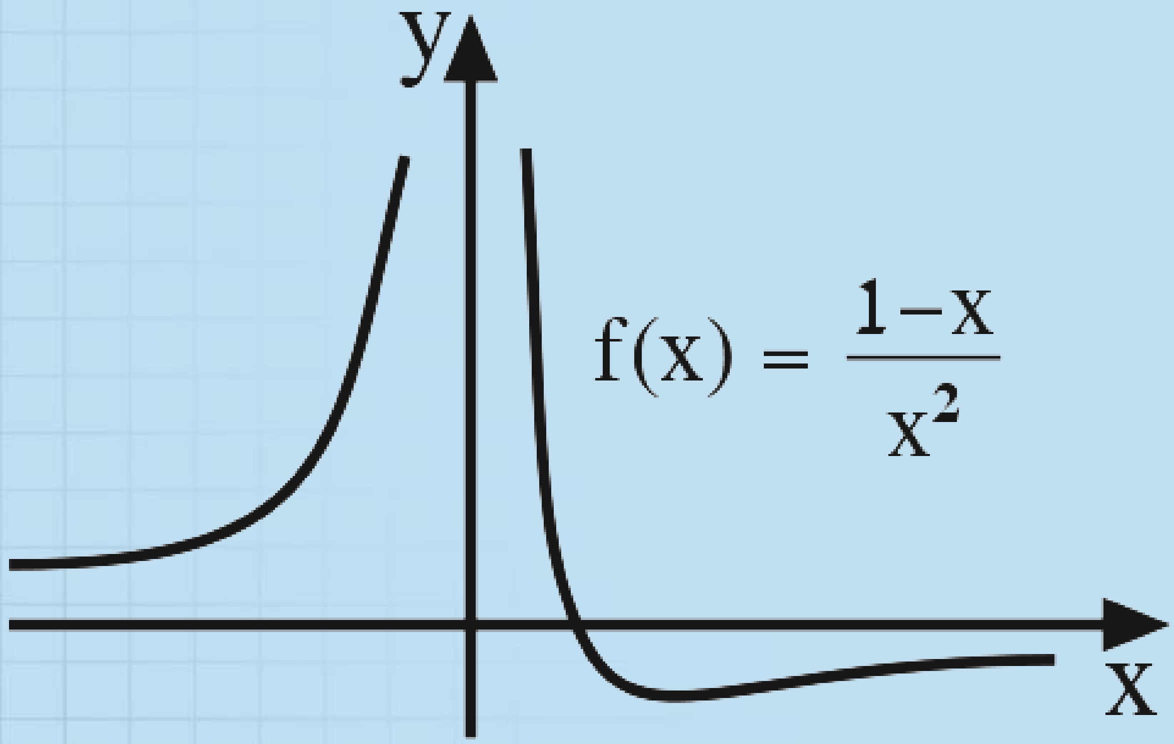
ה. **אסימפטוטות אנכיות** – כאשר $x = 0$ המכנה שווה לאפס והמונה לא שווה לאפס לכן הישר $x = 0$ (ציר ה-y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x והחזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 לכן האסימפטוטה היא $y = 0$, כלומר ציר ה-x.

לסיכום – האסימפטוטות המאונכות לצירים הן הצירים עצמם: $x = 0$, $y = 0$.

תרגיל לדוגמה

ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה. התיאור הגרפי מופיע משמאל.



$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	2	לא מוגדרת	2	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{9}$
$f'(x)$	$+$	$+$		$-$	$-$	0	$+$
עלייה ירידה	↗	↗		↘	↘	מינימום	↗

תרגיל לדוגמה

ז. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$? נמק.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{x^4}$$

$x=0$ מאפס את המכנה של הפונקציה וגם את המונה,
להמשך הבדיקה - נצמצם את הפונקציה אלגברית:

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{x^4}=\frac{(x-2)}{x^3}$$

הערך $x=0$ **עדיין** מאפס את המכנה
בצורתו המצומצמת, ולכן לפונקציה יש
אסימפטוטה אנכית עבור $x=0$

תרגיל לדוגמה

ז. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$? נמק.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{x^4}$$

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והחזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^4 לכן האסימפטוטה היא $y = 0$, כלומר ציר ה-x.

תרגיל לדוגמה

ח. בהסתמך על הגרף של $f(x)$ שרטט בצורה כללית את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ח. עפ"י **תחומי העלייה והירידה** של הפונקציה $f(x)$ שבפתרון של סעיף ג׳ נקבל שהפונקציה $f'(x)$ **חיובית** בתחום $x < 0$ או $x > 2$ **ושלילית** בתחום $0 < x < 2$.

בנקודה $x = 2$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת **קיצון** ולכן בנקודה $x = 2$ הפונקציה $f'(x)$ **חותכת** את ציר ה-x. לפי הנתון לפונקציה $\mathbf{f(x)}$

תרגיל לדוגמה

ח. בהסתמך על הגרף של $f(x)$ שרטט בצורה כללית את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

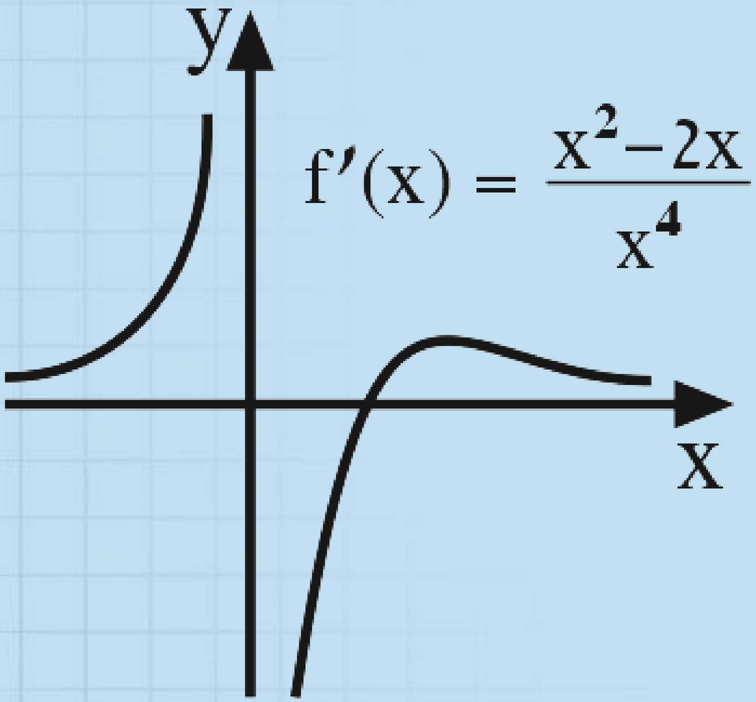
לפונקציה $\mathbf{f(x)}$ יש נקודת **פיתול** אחת בלבד

$$\Downarrow$$

$\mathbf{f'(x)}$ יש נקודת **קיצון** אחת בלבד.

תרגיל לדוגמה

ח. בהסתמך על הגרף של $f(x)$ שרטט בצורה כללית את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.



בהסתמך על נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x ועל האסימפטוטה האופקית שלה נקבל שנקודת הקיצון היחידה שלה חייבת להיות מימין לנקודת החיתוך ברביע הראשון.

בהצלחה