הקנייה

אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 73–70

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

הקנייה

כדי להבין את הנושא שבו נדון בסעיף זה נסתכל בפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ונציב במקום x ערכים **חיוביים** ההולכים וגדלים וערכים **שליליים** ההולכים וקטנים.

נחשב בכל מקרה את ערכי הפונקציה המתקבלים:

x	1	2	10	100
$f(x)$	0.5	0.8	0.99	0.9999

x	−1	−2	−10	−100
$f(x)$	0.5	0.8	0.99	0.9999

הקנייה

עפ"י התוצאות רואים שכאשר x **הולך וגדל** ושואף ל-∞ או **הולך וקטן** ושואף ל-$-\infty$

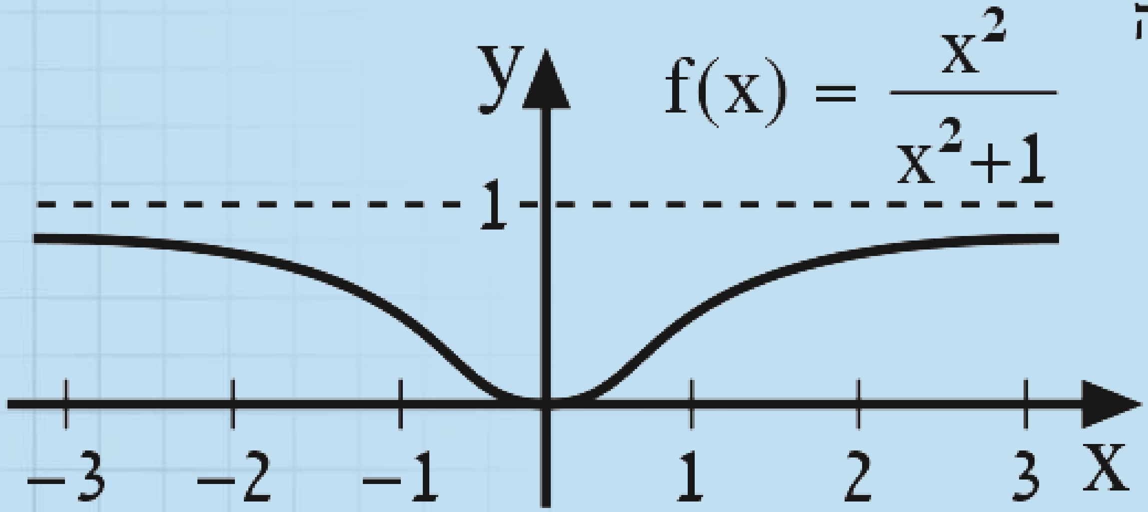
ערך **הפונקציה שואף ל-1**. **במילים אחרות:** כאשר x שואף ל-∞ או ל-$-\infty$

המרחק בין גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ לישר

$y = 1$, המקביל לציר ה-x, **שואף לאפס**. הישר

$y = 1$ נקרא **אסימפטוטה אופקית** של הפונקציה

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. נביא את ההגדרה:



הקנייה

אסימפטוטה אופקית – ישר מהצורה $y = b$ המקביל לציר ה-x (או מתלכד איתו) נקרא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)$ אם כאשר x שואף ל-$+\infty$ או ל-$-\infty$ המרחק בין גרף הפונקציה $f(x)$ לישר $y = b$ שואף לאפס.

הערה:

עפ"י ההגדרה צריך להתקיים: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - b| = 0$. לכן כדי למצוא אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$ צריך למעשה לחשב **גבולות** מהצורה $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ וכן $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

הקנייה

דוגמא א':

מצא את האסימפטוטה האופקית של כל אחת מהפונקציות הבאות:

(1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

(2) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2}$

(3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

הקנייה

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \quad (1)$$

(1) ברצוננו למצוא לאיזה ערך מספרי שואף הביטוי $\frac{2x}{x^2+3}$ כאשר x שואף ל-∞ או ל-$-\infty$.

כדי לעשות זאת נחלק את **המונה והמכנה** של הפונקציה בביטוי שמכיל את **החזקה הגבוהה** ביותר של x שמופיעה בפונקציה. במקרה זה הביטוי הוא x^2. בצורה כזאת **לא נשנה** את הביטוי האלגברי שמתאר את הפונקציה.

הקנייה

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \qquad (1)$$

$$.f(x) = \frac{2x}{x^2+3} = \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \frac{\boxed{\frac{2}{x}}}{1+\boxed{\frac{3}{x^2}}}$$

נשים לב שמתקיים: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$ (כי מחלקים מספר קבוע במספר שהולך וגדל ל-∞

או הולך וקטן ל-$-\infty$). באופן דומה מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$.

הקנייה

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+3}=\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}.$$

לכן, אם נעבור לגבול נקבל:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

לסיכום – האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{x^2+3}$ היא הישר $y=0$,
כלומר ציר ה-x.

הקנייה

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2}$$ (ב)

(ב) בצורה דומה נקבל כאן ע"י חילוק בחזקה הגבוהה ביותר, שהיא x^2:

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2}=\frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1-\frac{2}{x^2}}$$

הקנייה

(ב) $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2}$

ועי״י מעבר לגבול נקבל: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1-0}=3$.

לסיכום – האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2}$ היא הישר $y=3$.

הקנייה

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$ (ג)

(ג) כאן נקבל ע"י חילוק בחזקה הגבוהה ביותר, שהיא x^3:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}.$$

הקנייה

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \qquad (3)$$

אם ניתן ל- x לשאוף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ נקבל שערך הפונקציה במקרה זה שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$ ולכן **אין** אסימפטוטה אופקית.

לסיכום – לפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ אין אסימפטוטה אופקית.

הערה: באופן כללי מתקיים: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ (n טבעי).

הקנייה

הכללים למציאת אסימפטוטה אופקית של פונקציה רציונאלית:

א) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה יותר קטן ממעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז האסימפטוטה היא ציר ה-x. ($y = 0$).

ב) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה שווה למעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז האסימפטוטה היא הישר $y = \frac{a}{b}$, כאשר a הוא המקדם של ה-x בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה ו-b הוא המקדם של ה-x בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה.

ג) אם מעריך החזקה הגבוה ביותר במונה יותר גדול ממעריך החזקה הגבוה ביותר במכנה אז אין אסימפטוטה אופקית לפונקציה.

הקנייה

הערות:

א) באופן כללי צריך לבדוק **לחוד** את הגבול $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **ולחוד** את הגבול $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. במקרים מסויימים ייתכן ותתקבלנה שתי אסימפטוטות **אופקיות שונות** מהגבולות הנ"ל. (ראה את הדוגמא שבעמ' 141).

ב) אם לפונקציה אסימפטוטה המקבילה לציר ה-x אז משרטטים אותה לפני התיאור הגרפי של הפונקציה. בצורה כזאת ניתן לראות את צורת הגרף של הפונקציה עבור ערכי x חיוביים ההולכים וגדלים או עבור ערכי x שליליים ההולכים וקטנים. עוד נדגיש, שגרף הפונקציה **יכול לחתוך** את האסימפטוטה **האופקית** בנקודה (או בנקודות) **שאינה "רחוקה"** מראשית הצירים. (כזכור, בפונקציות שבהן נדון בספר זה, גרף הפונקציה איננו יכול לחתוך אסימפטוטה המאונכת לציר ה-x).

הקנייה

הערות:

ג) קיימות גם **אסימפטוטות משופעות** (כלומר שאינן מאונכות לצירים). משוואת הישר במקרה זה היא $y = mx+b$. במסגרת ספר זה לא נעסוק במציאת אסימפטוטות כאלה.

בהצלחה