תרגיל לדוגמה

נקודות קיצון – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 55–56, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס, נקבל: $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$.

כאשר שבר שווה ל-0 המונה שווה ל-0 (והמכנה שונה מ-0) לכן: $-2x^2+2 = 0$

והפתרונות הם: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

תרגיל לדוגמה

כדי לדעת איזו נקודה היא מינימום ואיזו היא מקסימום נגזור פעם שנייה:

$$f''(x) = \left(\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

לפני שנמשיך לחשב את הנגזרת השנייה כדאי לזכור שהמטרה שלנו היא **לא לגזור** את הפונקציה פעם שנייה אלא רק לדעת את **סימן הנגזרת השנייה** לפתרונות x_1 ו-x_2.

תרגיל לדוגמה

$$f''(x) = \frac{-4x\boxed{(x^2+1)^2}\boxed{-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}}{\boxed{(x^2+1)^4}}$$

המכפלה שבביטוי **הימני במונה תתאפס** גם ע"י x_1 וגם ע"י x_2

המכנה $(x^2+1)^4$ הוא **חיובי**.

גם הביטוי $(x^2+1)^2$ הוא **חיובי**

סימן הנגזרת השנייה נקבע רק לפי הביטוי $-4x$

תרגיל לדוגמה

$$f''(x) = \frac{\boxed{-4x}(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

סימן הנגזרת השנייה נקבע רק לפי הביטוי $-4x$

עבור $x_1 = 1$ נקבל $-4\cdot 1 = -4 < 0$ ולכן ב-$x = 1$ יש מקסימום.

עבור $x_2 = -1$ נקבל $-4\cdot(-1) = 4 > 0$ ולכן ב-$x = -1$ יש מינימום.

תרגיל לדוגמה

נחשב את ערכי y המתאימים ל-1 ו-1− ונקבל:

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = 1$$

$(1,1)$ היא נקודת מקסימום.

$$f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2 + 1} = -1$$

$(-1,-1)$ היא נקודת מינימום.

תרגיל לדוגמה

הערה:

הביטוי **היחיד** שקבע את סימן הנגזרת השנייה, $-4x$, הוא נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה

אם הנגזרת הראשונה של פונקציה היא שבר בעל מכנה חיובי לכל x (פרט אולי לנקודות בודדות שבהן המכנה מתאפס) אז סימן הנגזרת השנייה של נקודת קיצון הוא כסימן נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה.

בהצלחה