פתרון תרגיל

משיק – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 55, ת. 49

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

49) לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

תחום הגדרה: $g(x): \quad x \neq 0$

הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x , נסמנה α , מקיימת :

$$m = tg\,\alpha$$

כלומר, עלינו למצוא את שיפוע המשיק, m

נסמן את משוואת המשיק מהצורה $y = mx + n$

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

שיעור ה- x של נקודות ההשקה שונה בין הפונקציות

שני שיעורי ה- x חיוביים , נתון כי נקודות ההשקה ברביע הראשון והרביעי

נסמן את שיעור ה- x של נקודת ההשקה לפונקציה $f(x)$, $x=a>0$

נסמן את שיעור ה- x של נקודת ההשקה לפונקציה $g(x)$, $x=b>0$

לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה:

$$f'(a) = g'(b)$$

$$g'(x) = -3 \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$3a^2 = \frac{3}{b^2}$$

$$a^2b^2 = 1$$

לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו-$g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה:

$$f'(a) = g'(b)$$

$$a^2b^2 = 1$$

$$ab = 1 \qquad \cancel{ab = -1}$$

$$a, b > 0$$

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

נקודת ההשקה משותפת למשיק ולפונקציה ולכן מקיימת את משוואותיהם:

$f(x)$ $\quad (a, a^3)$

$g(x)$ $\quad \left(b, -\frac{3}{b}\right)$

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

נקודות ההשקה יקיימו גם את משוואת המשיק: $y=mx+n$

$f(x)$ $\quad (a,a^3) \quad$ $a^3=ma+n$

$g(x)$ $\quad \left(b,-\frac{3}{b}\right) \quad$ $-\frac{3}{b}=mb+n$

לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

נחסר בין המשוואות:

$$a^3 = ma + n$$

$$-$$

$$-\frac{3}{b} = mb + n$$

$$a^3 + \frac{3}{b} = m(a - b)$$

נציב את הקשר שמצאנו $ab = 1$

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף.
נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

נציב את הקשר שמצאנו $ab=1$

$$a^3+\frac{3}{b}=m(a-b)$$

$$a^3+3a=m\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$m=\frac{a^3+3a}{\frac{a^2-1}{a}}=\frac{a(a^3+3a)}{a^2-1}=f'(a)=3a^2$$

לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזוית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

$$\frac{a(a^3+3a)}{a^2-1} = 3a^2$$

$$a^2(a^2+3) = 3a^2(a^2-1)$$

$$a^2+3 = 3a^2-3$$

$$2a^2 = 6$$

לגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = -\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

$$2a^2 = 6$$

$$a = \sqrt{3} \qquad \cancel{a = -\sqrt{3}}$$

$$a > 0$$

לגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-\frac{3}{x}$ העבירו משיק משותף. נקודות ההשקה הן ברביעים הראשון והרביעי בהתאמה.

מצא את הזווית שהמשיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

$\Downarrow$

$$m=3a^2=9$$

$\Downarrow$

$$m=tg\,\alpha=9$$

באמצעות מחשבון:

$$\alpha=83.66^\circ$$

בהצלחה