הקנייה

שיפועי שני ישרים הניצבים זה לזה

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 57, 58

המצגת נערכה ע״י טל מדר

הקנייה

בסעיף זה נמצא את הקשר בין **שיפועי שני ישרים הניצבים** זה לזה.

טענה:

אם $y = m_1x+b_1$ **ו-**$y = m_2x+b_2$ **הם שני ישרים הניצבים זה לזה אז:**

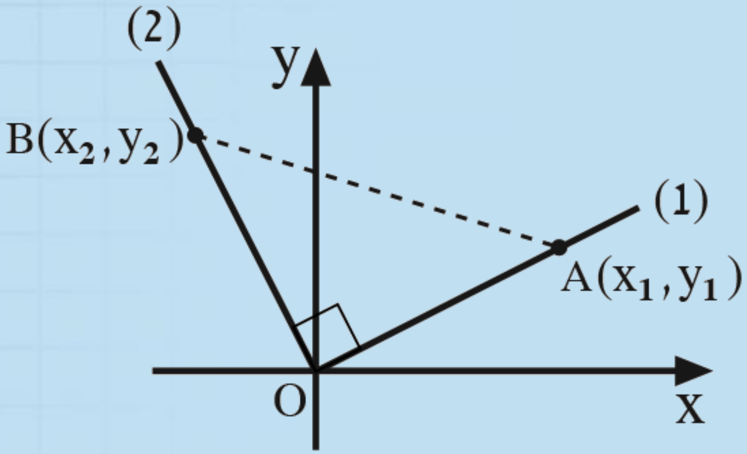
$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1} \qquad (m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 0)$$

הוכחה:

למעשה מספיק להוכיח את הטענה למקרה שהישרים הניצבים נחתכים **בראשית הצירים**, כי אם הם לא נחתכים בראשית אז אפשר להעביר שני ישרים המקבילים להם בהתאמה שנחתכים בראשית. ברור שגם שני הישרים שנחתכים בראשית ניצבים זה לזה.

הקנייה

נניח אם כן שהישרים (1) $y = m_1x$ ו-(2) $y = m_2x$
ניצבים זה לזה ונחתכים בראשית $(0,0)$.
תהי $A(x_1,y_1)$ נקודה כלשהי על הישר (1)
ו-$B(x_2,y_2)$ נקודה כלשהי על הישר (2). (הנקודות
A ו-B שונות מהראשית ואינן נמצאות על הצירים).
לפי משפט פיתגורס מתקיים: $OA^2 + OB^2 = AB^2$.
בעזרת הנוסחה למרחק בין שתי נקודות נקבל:



$$(x_1-0)^2+(y_1-0)^2+(x_2-0)^2+(y_2-0)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

לכן $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2$.

לאחר ביטול איברים דומים וצמצום נקבל: $y_1y_2 = -x_1x_2$.

הקנייה

היות והמכפלה $x_1x_2 \neq 0$ נוכל לחלק בה ונקבל: $\frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -1$, ז"א $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$.

אבל $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ וכן $m_2 = \frac{y_2}{x_2}$ לכן $m_1 \cdot m_2 = -1$. (הוכחה נוספת ראה בעמ' 579).

הערות:

א) בצורה דומה אפשר להוכיח שגם הכיוון ההפוך נכון, כלומר אם $m_1 \cdot m_2 = -1$ אז הישרים ניצבים זה לזה.

ב) לא ניתן להיעזר בנוסחה כאשר הישרים (הניצבים) מאונכים לצירים. משוואותיהם הן מהצורה $y = b$ או $x = a$, ז"א $m = 0$ או m לא מוגדר. מקרים אלה יש לבדוק מבלי להיעזר בנוסחה.

תרגיל לדוגמה

הראה שהישרים (1) $y = -4x-3$ ו-(2) $4y-x = 8$ ניצבים זה לזה.

פתרון:

תחילה נרשום את ישר (2) בצורה המפורשת כדי שנוכל למצוא את השיפוע שלו.

אם נבודד את y נקבל: $4y = x+8$ ולכן $y = \frac{1}{4}x+2$. נעבור ל**פתרון:**

השיפוע של ישר (1) הוא $m_1 = -4$. השיפוע של ישר (2) הוא $m_2 = \frac{1}{4}$.

מתקיים: $m_1 \cdot m_2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$ ולכן הישרים (1) ו-(2) ניצבים זה לזה.

השאלה

8) מצא, מבין הישרים הבאים, את זוגות הישרים הניצבים זה לזה:

א. $x+y = 3$
ב. $x-3y = 1$
ג. $y = \frac{1}{2}x+2$
ד. $x-y = 1$
ה. $y = -3x$
ו. $y = x$
ז. $2x-y = 0$
ח. $2y+x = 0$

8) מצא, מבין הישרים הבאים, את זוגות הישרים הניצבים זה לזה:

פתרון

תחילה נסדר את משוואות הישרים

א. $y = -x + 3$

ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

ג. $y = \frac{1}{2}x + 2$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = -3x$

ו. $y = x$

ז. $y = 2x$

ח. $y = -\frac{1}{2}x$

א + ד, א + ו

ב + ה

ז + ח

ג ו- ד בודדים!

בהצלחה