פתרון תרגיל

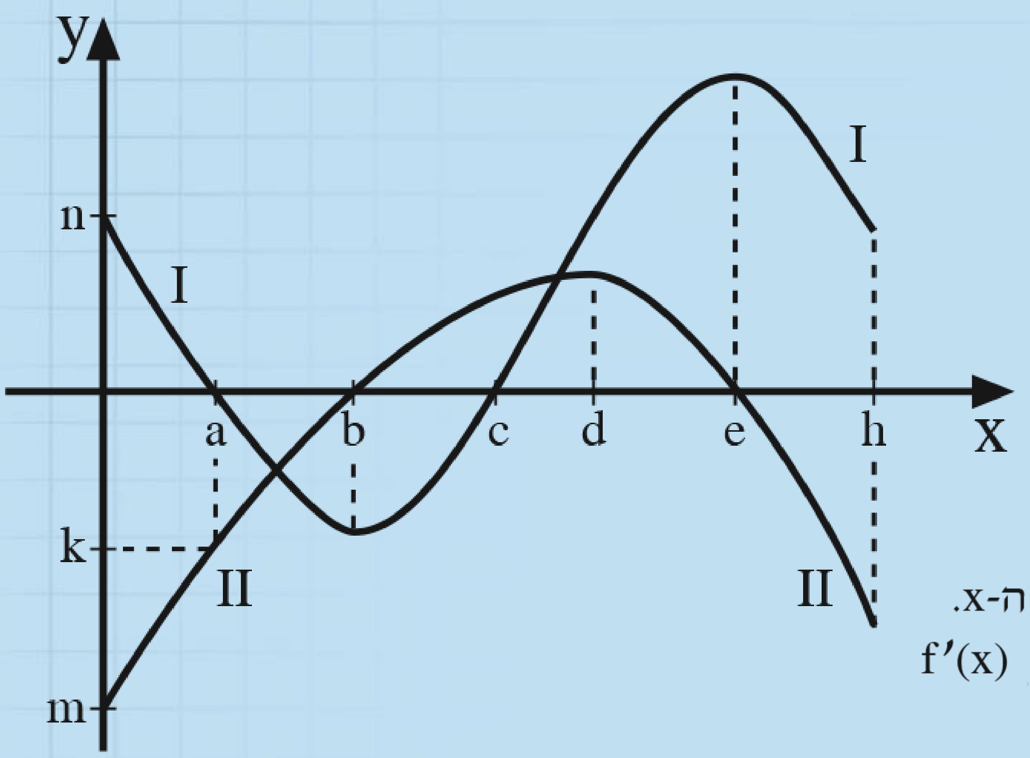
הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 41, ת. 11

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה



11) בציור מתוארים שני גרפים I ו-II בתחום $0 \le x \le h$. אחד מהגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.
היעזר בפרמטרים מתאימים ובציור וענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא איזה גרף מתאר את $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f'(x)$. נמק.

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $f(x)$.

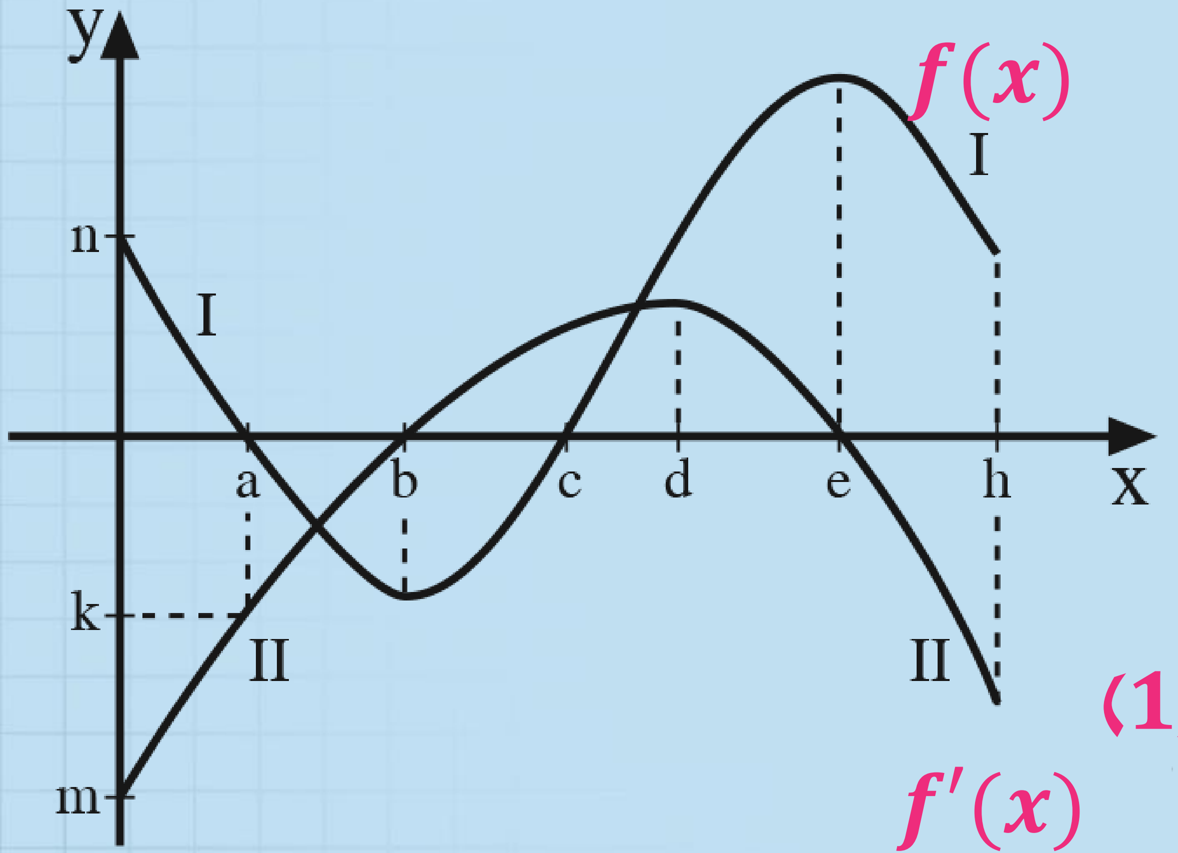
ג. (1) מצא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה-x.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום הנתון אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול.

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.
(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.
(2) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של $g(x)$.
(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ אם ידוע שהיא חיובית בתחום הנתון. סמן על הגרף של $g(x)$ את נקודות הפיתול שלה.

ה. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות הבאות שעל הגרף:
(1) $x = 0$. (2) $x = a$.

א. מצא איזה גרף מתאר את $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f'(x)$. נמק.

פתרון



כאשר גרף הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר x, לגרף הפונקציה $f(x)$ תהיה נקודת קיצון

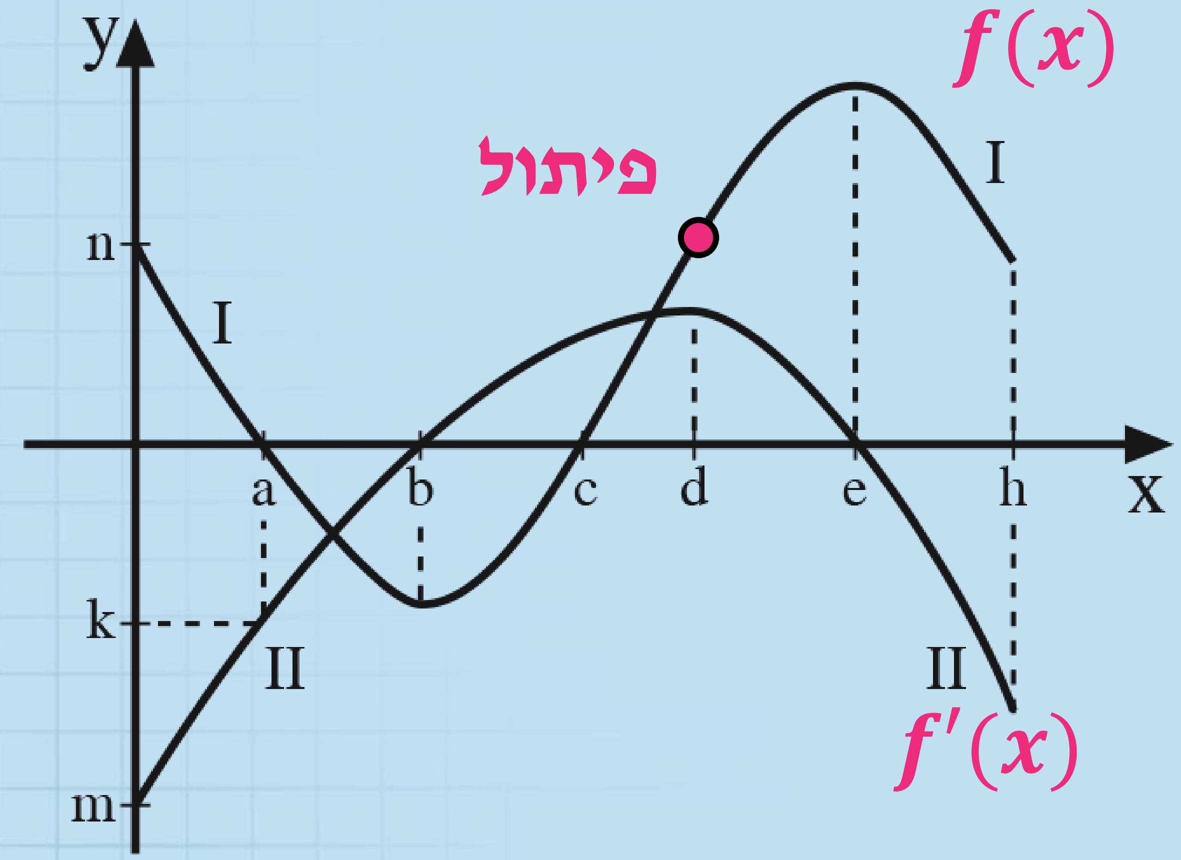
בנקודה $x=a$ גרף (1) חותך את ציר ה- x אבל לגרף (2) **אין** נקודת קיצון

גרף הפונקציה $f(x)$ מתואר ע"י גרף (1)

גרף הנגזרת $f'(x)$ מתואר ע"י גרף (2)

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של f(x).

פתרון

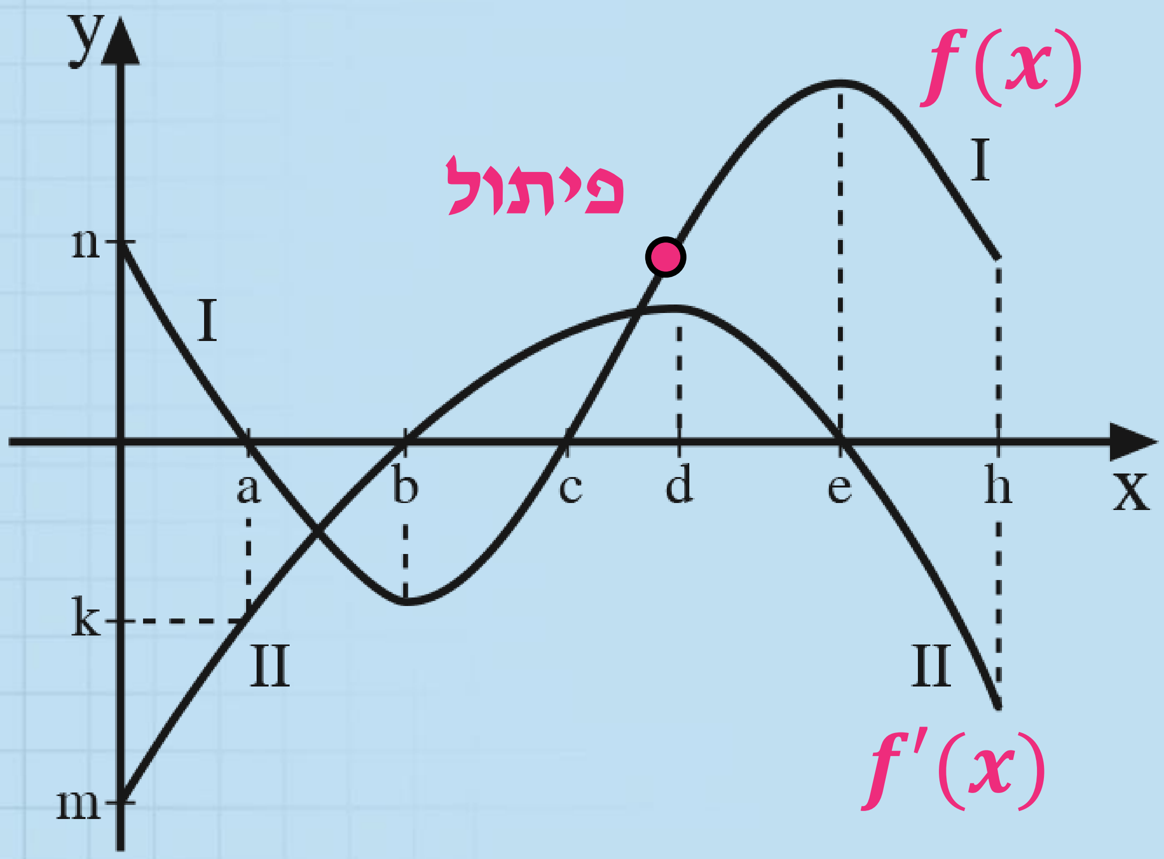


כאשר לגרף הנגזרת $f'(x)$ נקודות קיצון פנימיות, לגרף הפונקציה $f(x)$ תהיה נקודת פיתול

לגרף הנגזרת $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית בנקודה $x = d$, ולכן לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול בנקודה זו

ג. (1) מצא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה-x.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום הנתון אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון



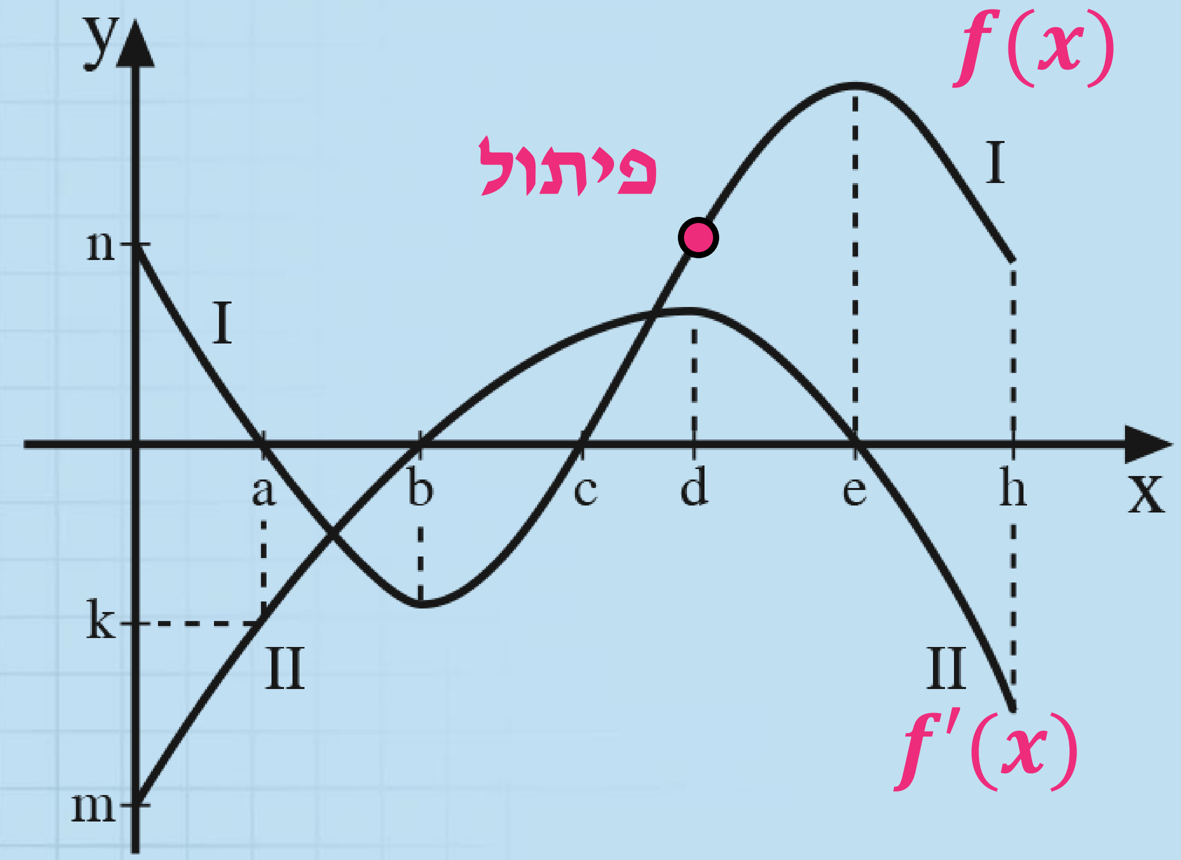
(1) כאשר לגרף הפונקציה $f'(x)$ נקודות קיצון פנימיות, לגרף הנגזרת $f''(x)$ תהיה נקודת חיתוך עם ציר x

לגרף הפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית בנקודה $\boldsymbol{x = d}$, ולכן לגרף הנגזרת $f''(x)$ נקודת חיתוך עם ציר x בנקודה זו $\boldsymbol{f''(d) = 0}$

ג. (1) מצא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה-x.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום הנתון אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון

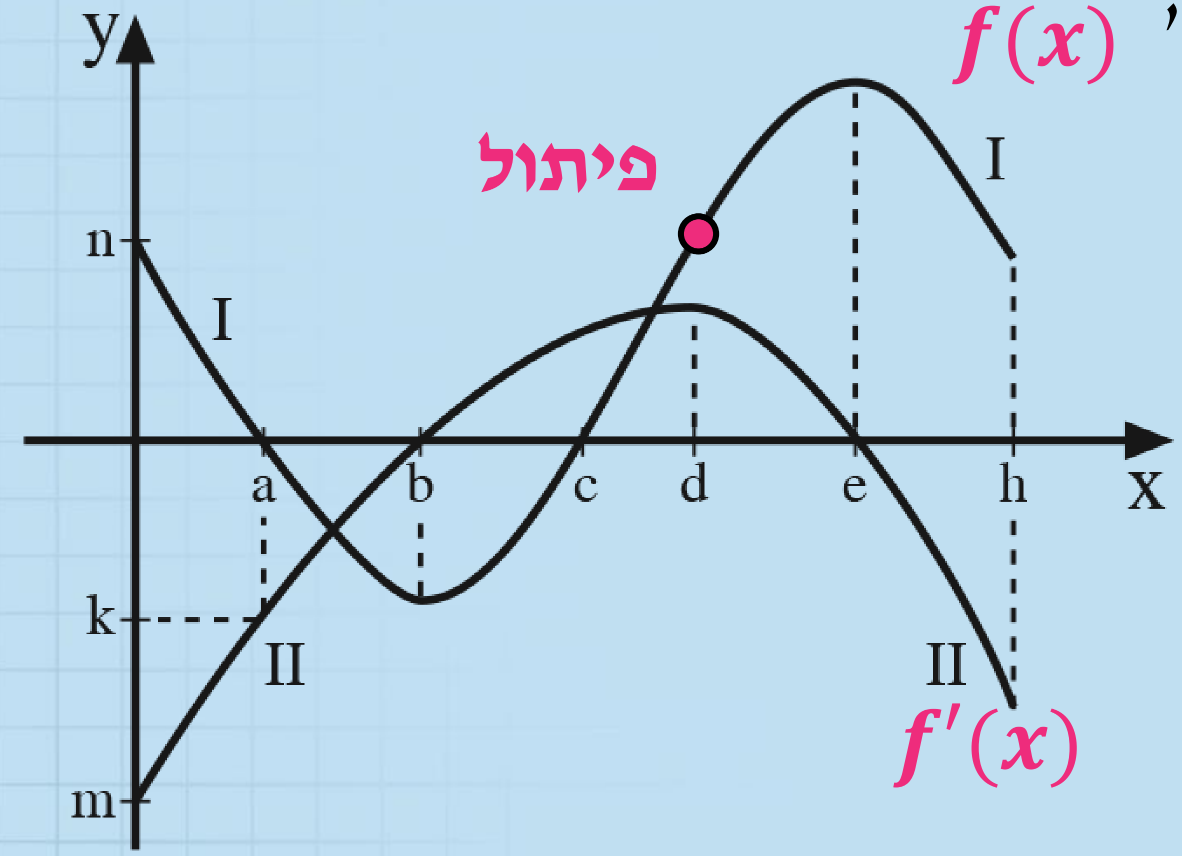
(2) כאשר גרף הפונקציה $f'(x)$ עולה, גרף הנגזרת $f''(x)$ יהיה חיובי.



בתחום $\mathbf{0 < x < d}$
גרף הפונקציה $f'(x)$ **עולה**,
ולכן בתחום זה גרף הנגזרת
$f''(x)$ **חיובי**

ג. (1) מצא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה-x.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום הנתון אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון

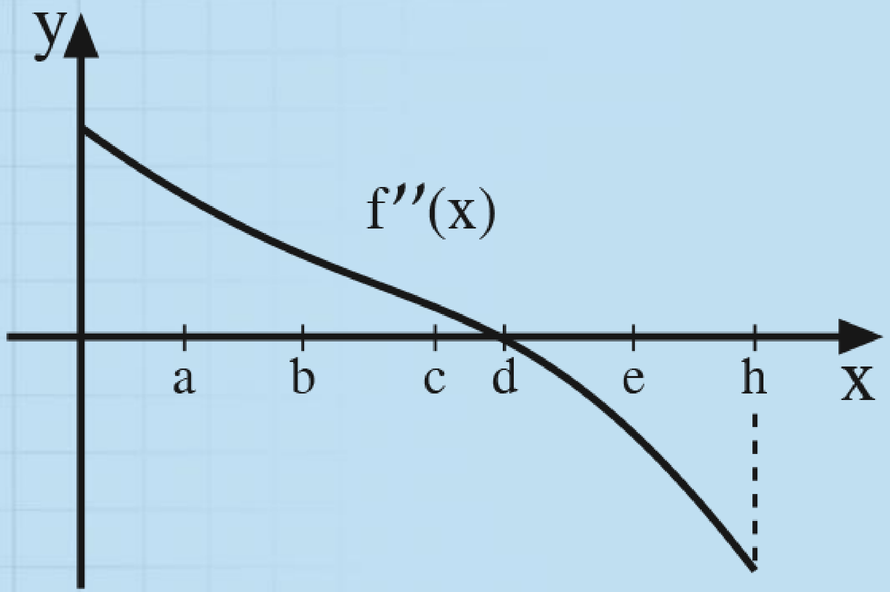


(2) כאשר גרף הפונקציה $f'(x)$ יורד,
גרף הנגזרת $f''(x)$ יהיה שלילי.

בתחום $d < x < h$
גרף הפונקציה $f'(x)$ **יורד**,
ולכן בתחום זה גרף הנגזרת
$f''(x)$ **שלילי**

ג. (1) מצא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f''(x)$ עם ציר ה-x.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום הנתון אם ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון



(2) נתון שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות פיתול

$\Downarrow$

לגרף הנגזרת $f''(x)$ אין נקודות קיצון

$$f''(d) = 0$$

בתחום $0 < x < d$: $f''(x) > 0$

בתחום $d < x < h$: $f''(x) < 0$

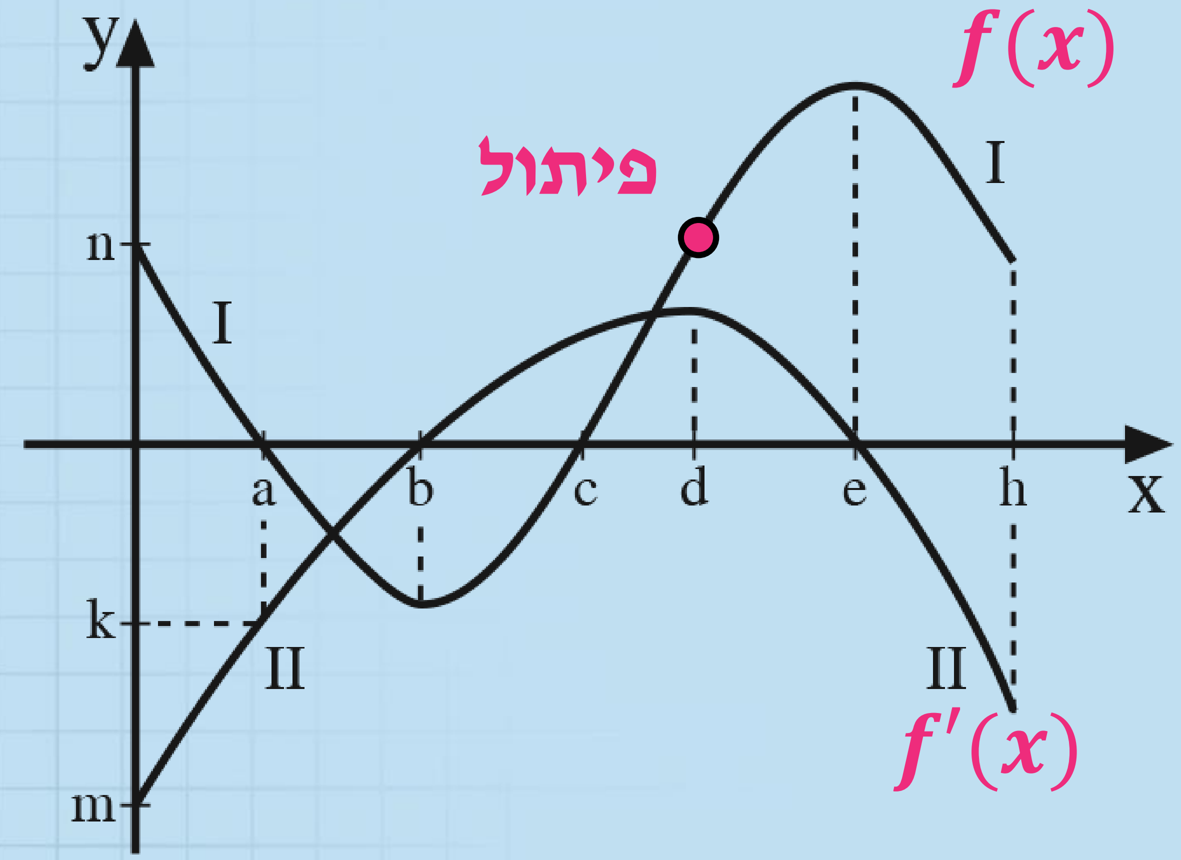
ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון

(1) כאשר גרף הנגזרת $f(x)$ חותך את ציר x, לגרף הפונקציה $g(x)$ יהיו נקודות **קיצון פנימיות**

$$f(a) = g'(a) = 0$$



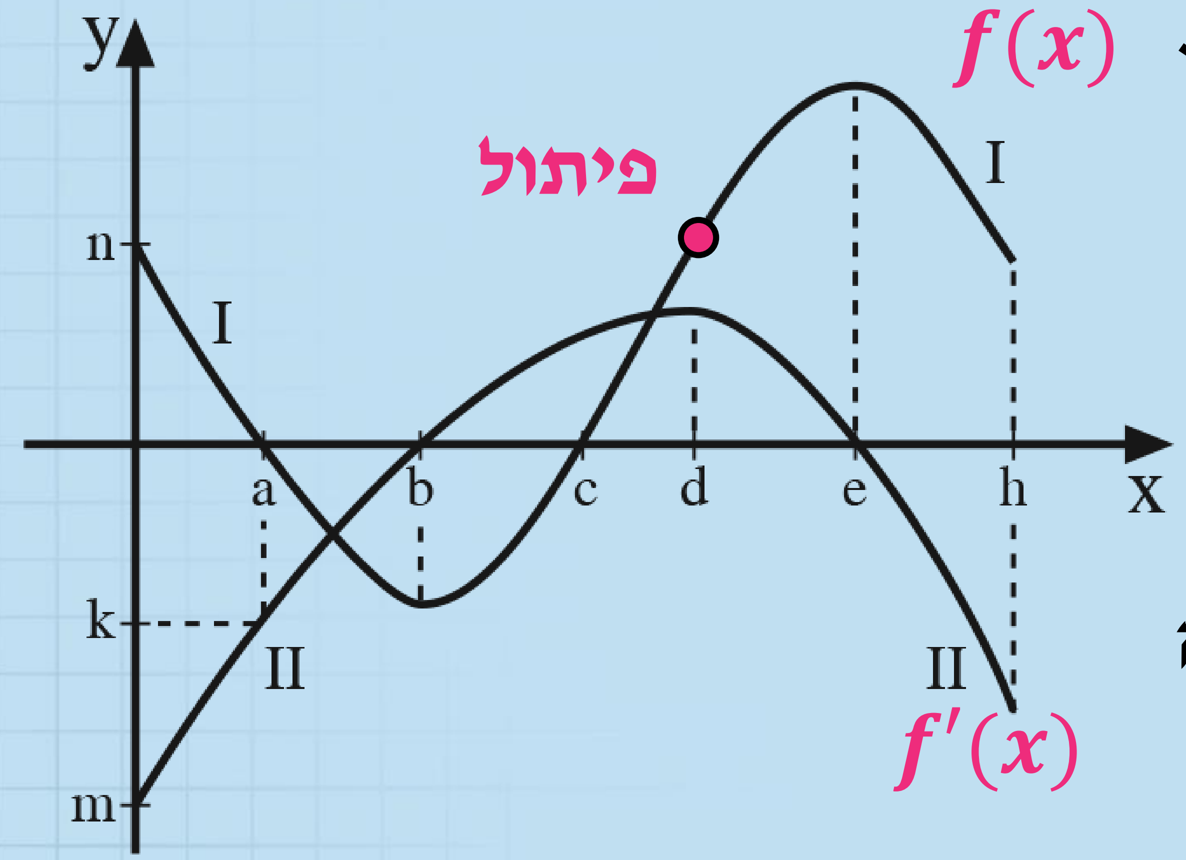
גרף הנגזרת $f(x)$ משנה תחום מחיוביות לשליליות ולכן לפונקציה $g(x)$ יש בנקודה

$x = a$ נקודת קיצון מסוג מקסימום

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון



(1) כאשר גרף הנגזרת $f(x)$ חותך את ציר x, לגרף הפונקציה $g(x)$ יהיו נקודות **קיצון פנימיות**

$$f(c) = g'(c) = 0$$

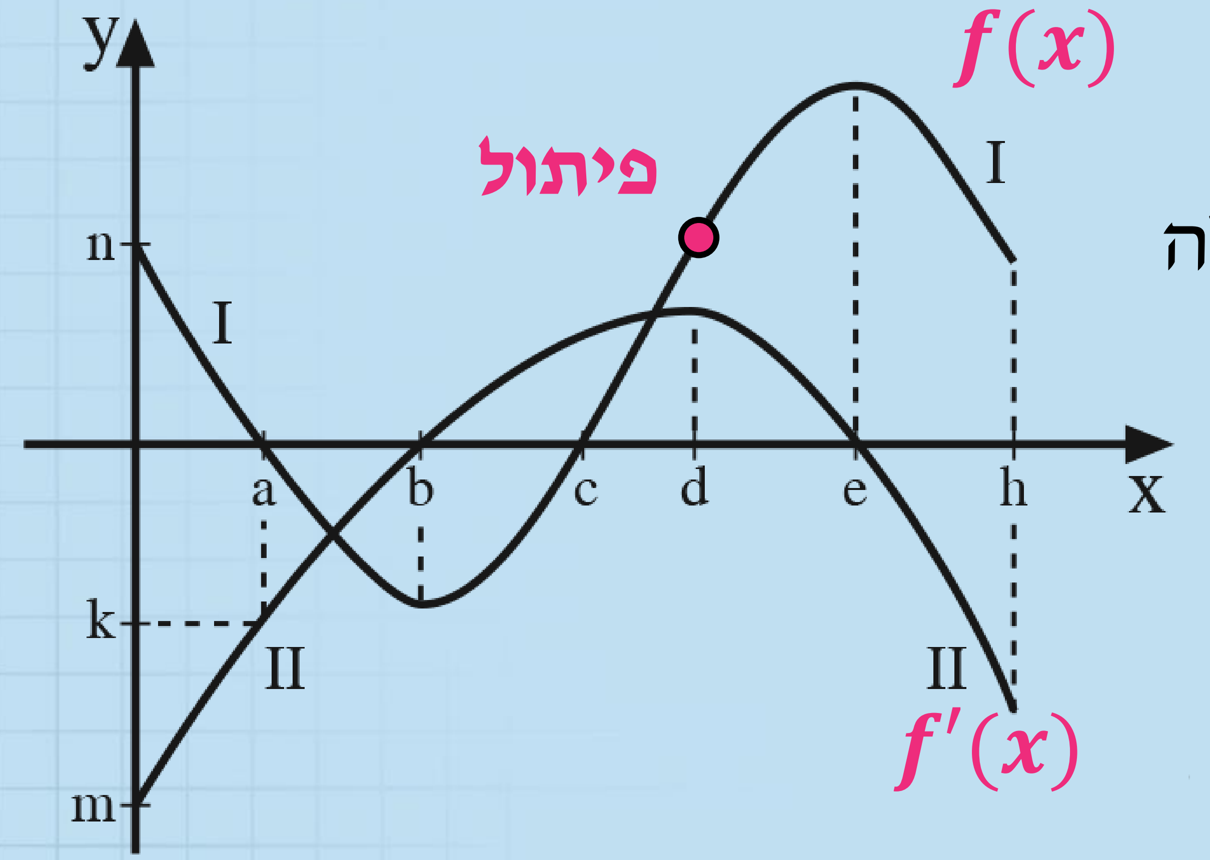
גרף הנגזרת $f(x)$ משנה תחום משליליות לחיוביות ולכן לפונקציה $g(x)$ יש בנקודה **$x = c$ נקודת קיצון מסוג מינימום**

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון

(1) נקודות קיצון בקצה תחום



גרף הנגזרת $f(x)$ חיובי אחרי הנקודה $x = 0$, משמע גרף הפונקציה $g(x)$ עולה החל מנקודה זו.

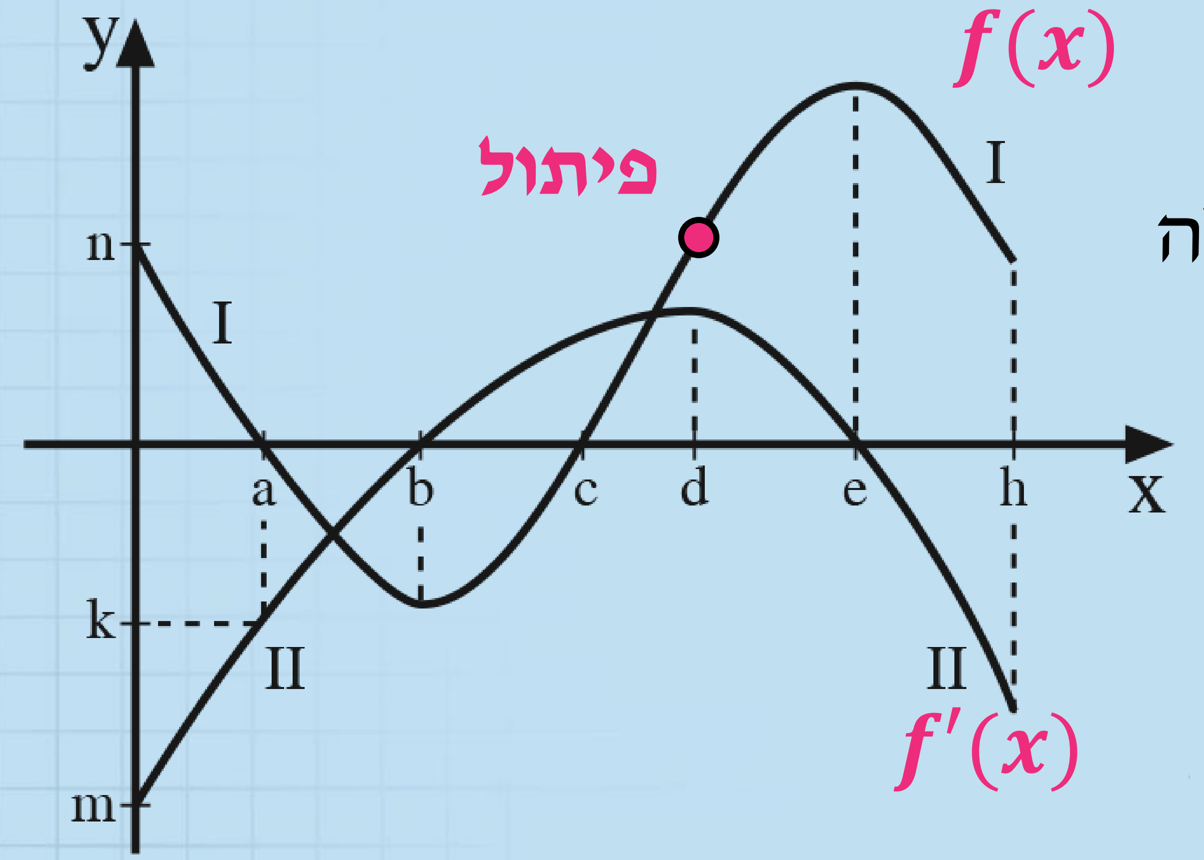
בנקודה $x = 0$ לפונקציה $g(x)$ נקודת קצה מסוג **מינימום**

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון

(1) נקודות **קיצון בקצה תחום**

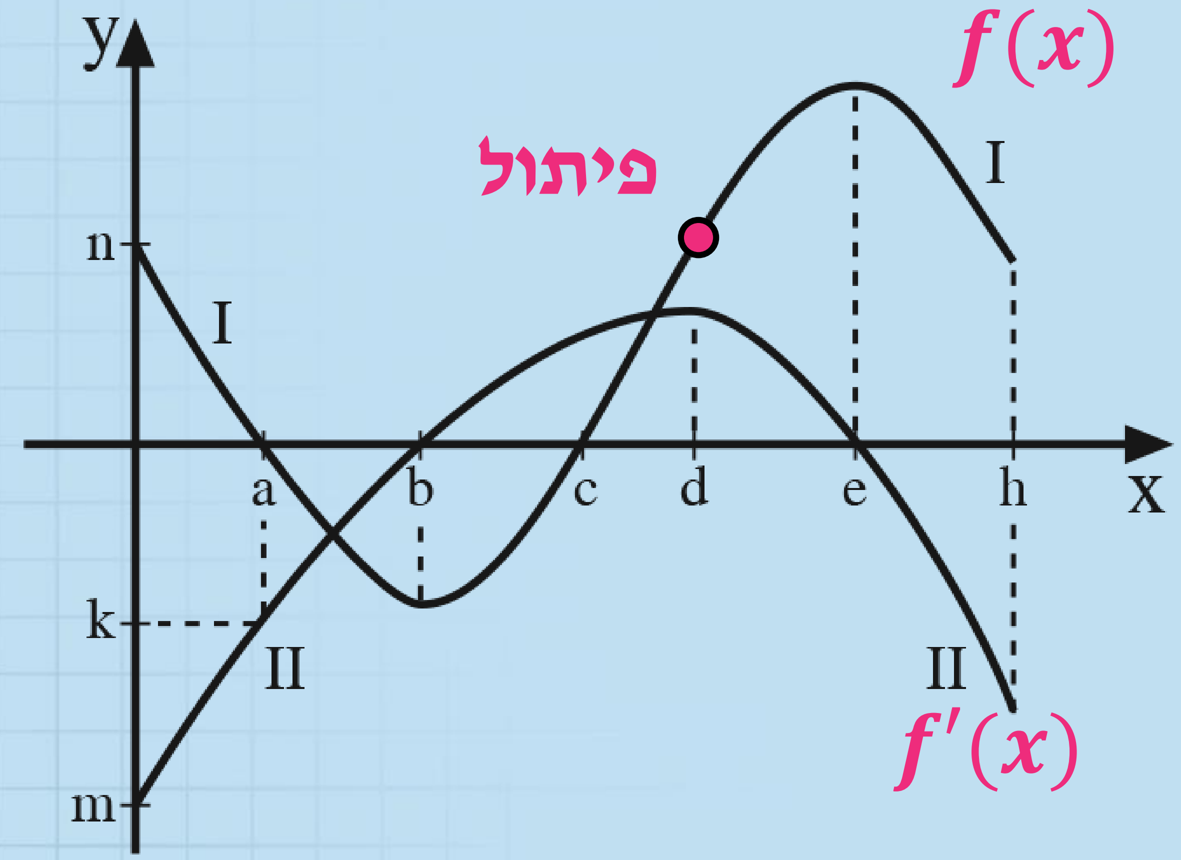


גרף הנגזרת $f(x)$ חיובי עד לנקודה $x = h$, משמע גרף הפונקציה $g(x)$ עולה עד לנקודה זו.

בנקודה $x = h$ לפונקציה $g(x)$ נקודת קצה מסוג **מקסימום**

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.
(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון



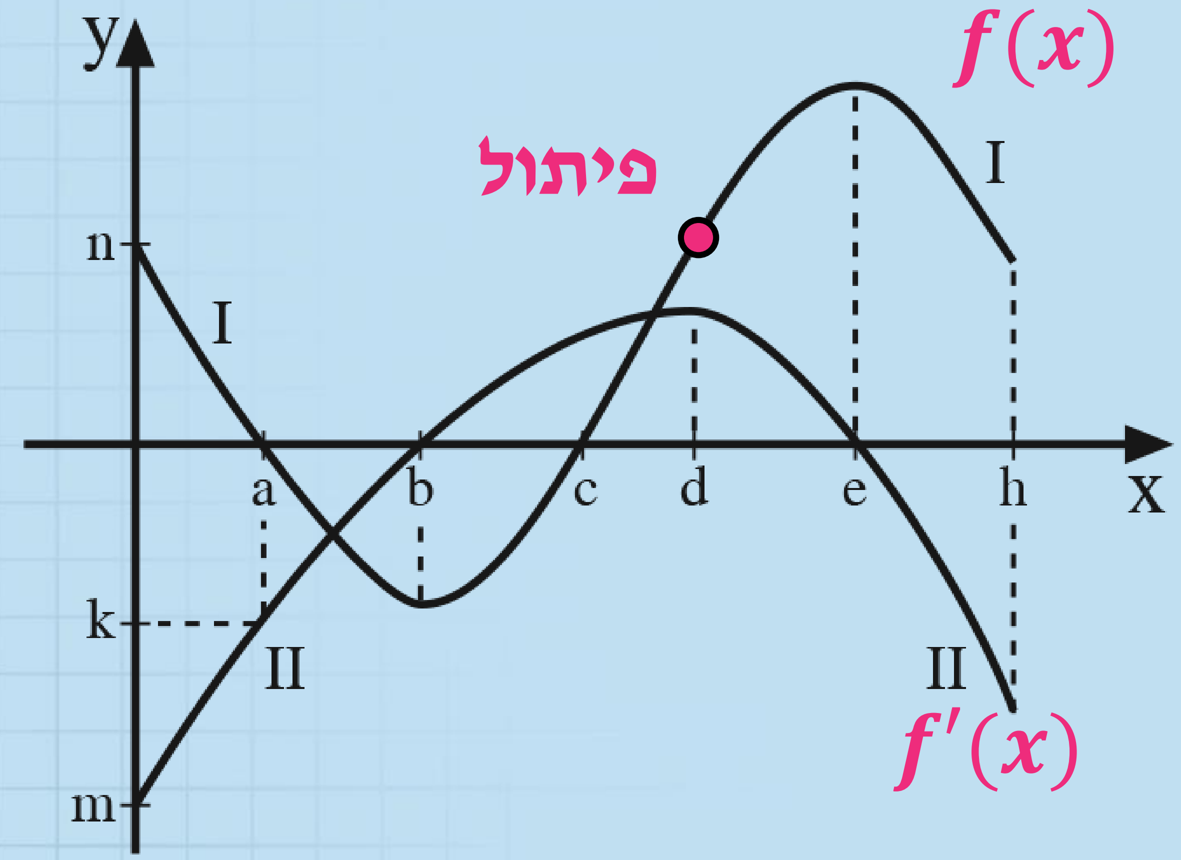
(1) שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$:

$x = 0$: מינימום קצה
$x = a$: מקסימום
$x = c$: מינימום
$x = h$: מקסימום קצה

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(2) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של $g(x)$.

פתרון



כאשר לגרף הנגזרת $f(x)$ נקודות קיצון פנימיות, לגרף הפונקציה $g(x)$ יהיו נקודות פיתול

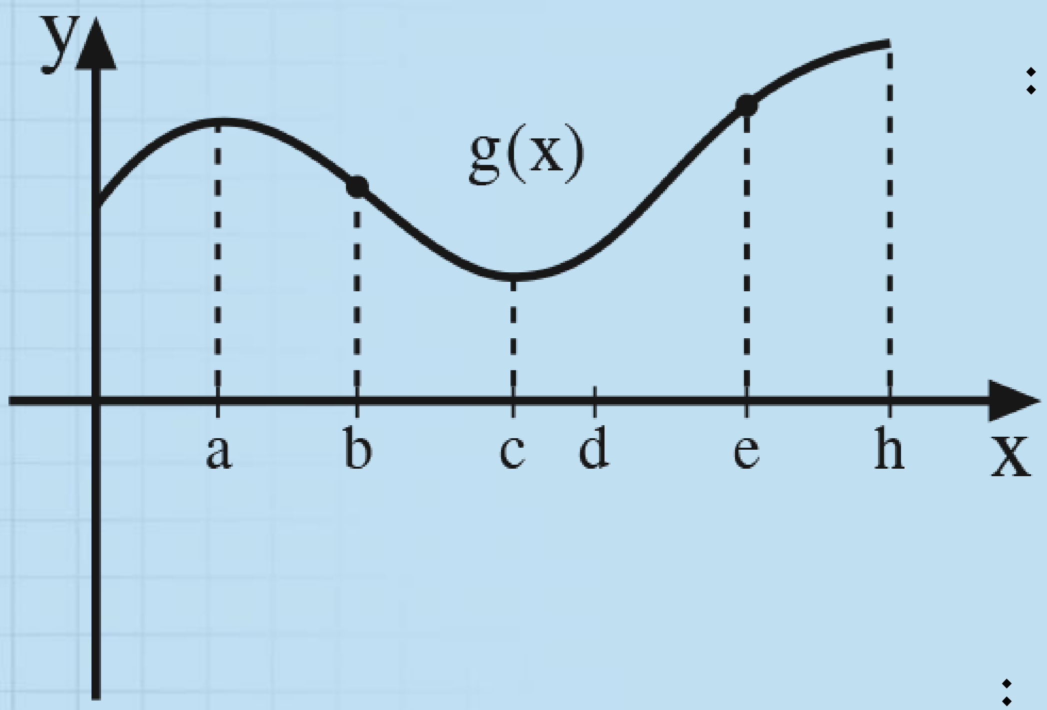
לגרף הנגזרת $f(x)$ נקודות קיצון פנימיות בנקודות $x = b$ ו- $x = e$, לכן לגרף הפונקציה $g(x)$ יהיו נקודת פיתול בערכי x אלו

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנתון.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ אם ידוע שהיא חיובית בתחום הנתון. סמן על הגרף של $g(x)$ את נקודות הפיתול שלה.

פתרון

$g(x) > 0$ בתחום הנתון



שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$:

$x = 0$: **מינימום קצה**

$x = a$: **מקסימום**

$x = c$: **מינימום**

$x = h$: **מקסימום קצה**

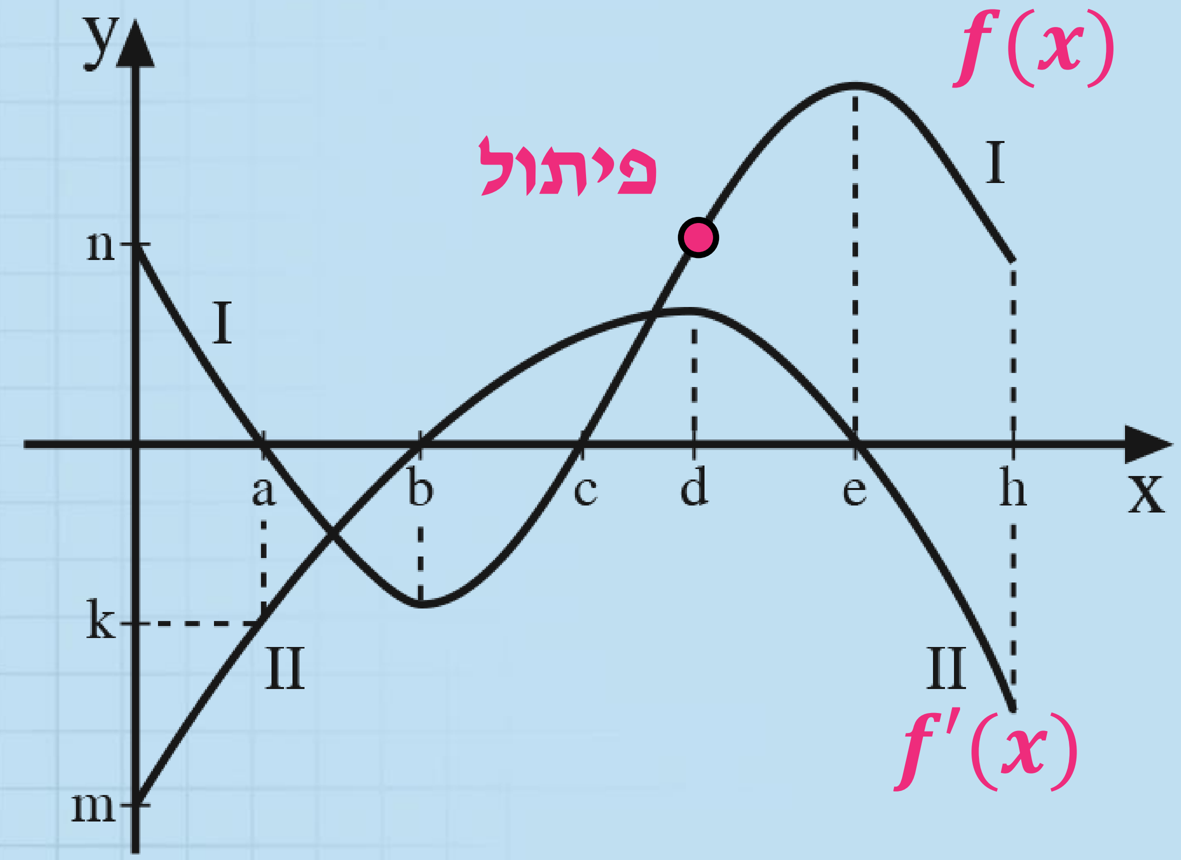
שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $g(x)$:

$x = b$ ו- $x = e$

ה. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות הבאות שעל הגרף:

(1) $x = 0$. (2) $x = a$.

פתרון



משוואת משיק באמצעות שיפוע (ערך הנגזרת בנקודה) ונקודת (נקודה ההשקה)

(1) $x = 0$:

$$m = f'(0) = m$$

$$f(0) = n \quad \Rightarrow \quad (0, n)$$

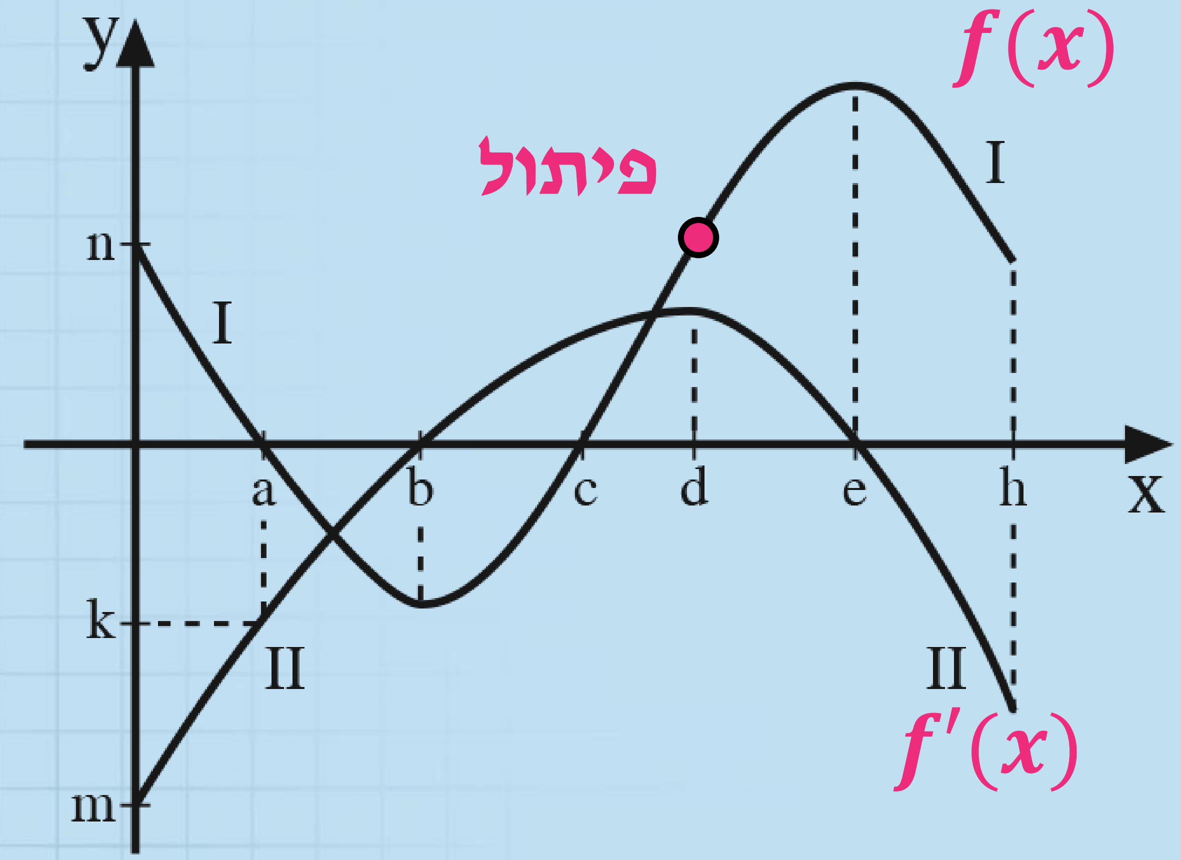
$$y - n = m(x - 0)$$

$$y = mx + n$$

ה. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות הבאות שעל הגרף:

(1) $x = 0$. (2) $x = a$.

פתרון



משוואת משיק באמצעות שיפוע (ערך הנגזרת בנקודה) ונקודה (נקודת השקה)

(2) $x = a$:

$$m = f'(a) = k$$

$$f(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a, 0)$$

$$y - 0 = k(x - a)$$

$$\boldsymbol{y = kx - ka}$$

בהצלחה