הקנייה

נקודות פיתול והקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

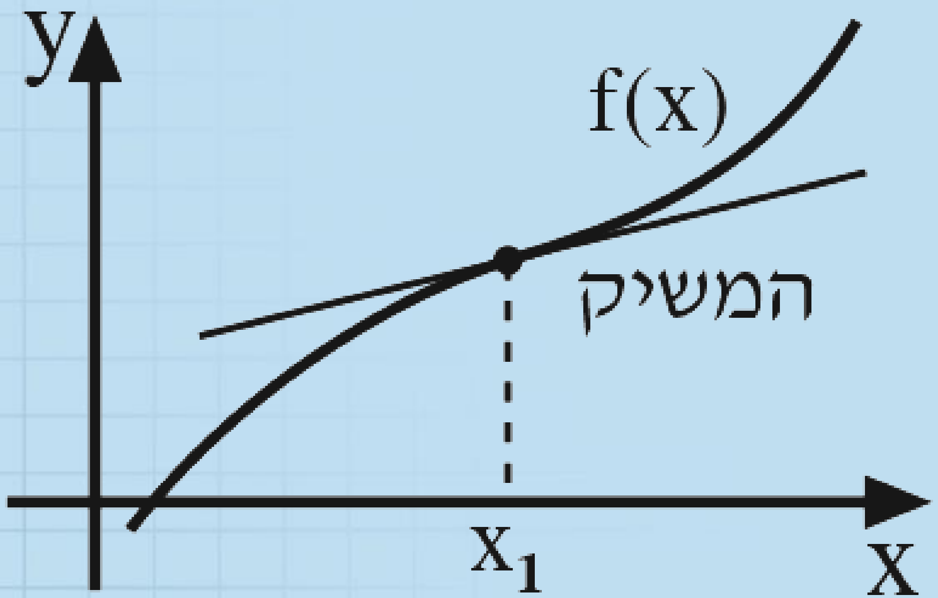
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 36–34

הקנייה

נקודות פיתול

נקודת פיתול של פונקציה היא נקודה שבה המשיק לגרף הפונקציה עובר מצד אחד של הגרף לצד השני.



בנקודה שבה $x = x_1$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול.

הקנייה

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

שני מקרים:

(1) התיאור הגרפי של הפונקציה $f(x)$ עפ״י התיאור הגרפי של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

(2) התיאור הגרפי של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ עפ״י התיאור הגרפי של הפונקציה $f(x)$.

הערה: שני המקרים הנ״ל מתקיימים גם כאשר התיאור הגרפי הוא של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ עפ״י התיאור הגרפי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ ולהיפך.

הקנייה

מקרה (1) – התיאור הגרפי של $f(x)$ עפ"י $f'(x)$:

נקודות הקיצון (הפנימיות) של $f(x)$ – במקרה זה הנקודות שבהן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **חותכת** את ציר ה-x ועוברת מצד אחד שלו לצד שני הן **נקודות הקיצון** (הפנימיות) של הפונקציה $f(x)$. אם המעבר של $f'(x)$ הוא **משליליות לחיוביות** אז הנקודה היא נקודת **מינימום** של $f(x)$. אם המעבר של $f'(x)$ הוא **מחיוביות לשליליות** אז הנקודה היא נקודת **מקסימום** של $f(x)$. אם הגרף של $f'(x)$ רק **נוגע** בציר ה-x אבל **לא** חותך אותו אז הנקודה היא נקודת **פיתול** של $f(x)$ שהמשיק בה מקביל לציר ה-x.

הקנייה

מקרה (1) – התיאור הגרפי של $f(x)$ עפ"י $f'(x)$:

תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ – בתחום שבו הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **חיובית** הפונקציה $f(x)$ **עולה**. בתחום שבו $f'(x)$ **שלילית** הפונקציה $f(x)$ **יורדת**.

הקנייה

מקרה (2) – התיאור הגרפי של $f'(x)$ עפ"י $f(x)$:

נקודות החיתוך עם ציר ה-x של $f'(x)$ – בכל **נקודת קיצון** (פנימית) של הפונקציה $f(x)$ הפונקציה $f'(x)$ **חותכת** את ציר ה-x. אם הנקודה היא נקודת **מינימום** אז הגרף של $f'(x)$ עובר **משליליות לחיוביות**. אם הנקודה היא נקודת **מקסימום** אז הגרף של $f'(x)$ עובר **מחיוביות לשליליות**.

הקנייה

מקרה (2) – התיאור הגרפי של $f'(x)$ עפ"י $f(x)$:

נקודות הקיצון של $f'(x)$ – כאן ייתכן וקיימת בעיה, נסביר זאת. צריך לזכור שקיים הכלל הבא:

בכל נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$ (שהמשיק בה לא מאונך לציר ה-x) יש לפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

היות ולא ניתן בדרך כלל לקבוע, ע"י **התבוננות** בגרף של $f(x)$, מהן נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ אז לא ניתן גם למצוא את כל נקודות הקיצון של $f'(x)$. התיאור הגרפי של $f'(x)$ ללא כל נקודות הקיצון שלה הוא תיאור לא שלם. לכן במקרה זה צריך להיות נתון מידע נוסף. למשל: כמה נקודות פיתול יש ל-$f(x)$ או לחילופין כמה נקודות קיצון יש ל-$f'(x)$. בעזרת מידע זה ניתן יהיה לשרטט את הגרף של $f'(x)$ בצורה יותר מדוייקת.

הקנייה

מקרה (2) – התיאור הגרפי של $f'(x)$ עפ"י $f(x)$:

תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ – בתחום שבו $f(x)$ **עולה** אז $f'(x)$ היא **חיובית** ובתחום שבו $f(x)$ **יורדת** אז $f'(x)$ היא **שלילית**.

הקנייה

הערה:

בפרק הרביעי נסביר בפירוט כיצד למצוא נקודת פיתול על גרף של פונקציה שהביטוי האלגברי שלה נתון. בשלב זה נסתפק בשני הכללים הבאים:

א) בכל נקודת פיתול של $f(x)$, שהמשיק בה לא מאונך לציר ה-x, יש ל-$f'(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

ב) בכל נקודת פיתול של $f'(x)$, שהמשיק בה לא מאונך לציר ה-x, יש ל-$f''(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

בהצלחה