פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – תרגילים לחזרה עם פולינומים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 33, ת. 19

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

19) נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. באיזה רביע נמצאת נקודת המקסימום של הפונקציה? נמק.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה אם למשוואה $f(x) = 0$ יש:

(1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$:

(1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(1) נקודות חיתוך עם ציר y : **נדרוש** $\boldsymbol{x = 0}$

$$f(0) = 4 \cdot 0^3 - 3a^2 \cdot 0 + a^2 = a^2$$

$\boldsymbol{(0, a^2)}$

(2) נקודות קיצון : **נדרוש** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = 12x^2 - 3a^2 = 0$$

נתונה הפונקציה $f(x)=4x^3-3a^2x+a^2$, $a>0$. א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(2) נקודות קיצון: **נדרש $f'(x)=0$**

$$f'(x)=12x^2-3a^2=0$$

$$x=\pm\frac{a}{2}$$

נאבחן את הנקודות **החשודות** לקיצון באמצעות הנגזרת השנייה

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(2) נקודות קיצון: $f''(x)$

$$f''(x) = (12x^2 - 3a^2)' = 24x$$

$$f''\left(\frac{a}{2}\right) = 24 \cdot \frac{a}{2} = 12a \quad > 0$$

נתון $a > 0$ ולכן הביטוי חיובי

בנקודה שבה $x = \frac{a}{2}$ לפונקציה נקודת מינימום

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. א. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(2) נקודות קיצון:

נמצא את שיעור ה- y באמצעות הצבת שיעור ה- x בפונקציה

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 3a^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + a^2$$

$$= \frac{a^3}{2} - \frac{3}{2}a^3 + a^2 = -a^3 + a^2$$

הנקודה $\left(\frac{a}{2}, -a^3 + a^2\right)$ נקודת מינימום

נתונה הפונקציה $f(x)=4x^3-3a^2x+a^2$, $a>0$. א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(2) נקודות קיצון: $f''(x)$

$$f''(x)=(12x^2-3a^2)'=24x$$

$$f''\left(-\frac{a}{2}\right)=24\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)=-12a\ <0$$

נתון $0<a$ ולכן הביטוי שלילי.

בנקודה שבה $x=-\frac{a}{2}$ לפונקציה נקודת מקסימום

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. א. היעזר ב-a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

(2) נקודות קיצון:

נמצא את שיעור ה- y באמצעות הצבת שיעור ה- x בפונקציה

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^3 - 3a^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + a^2$$

$$= -\frac{a^3}{2} + \frac{3}{2}a^3 + a^2 = a^3 + a^2$$

הנקודה $\left(-\frac{a}{2}, a^3 + a^2\right)$ נקודת מקסימום

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

ב. באיזה רביע נמצאת נקודת המקסימום של הפונקציה? נמק.

פתרון

הנקודה $\left(-\frac{a}{2}, a^3 + a^2\right)$ נקודת מקסימום

נתון $0 < a$:

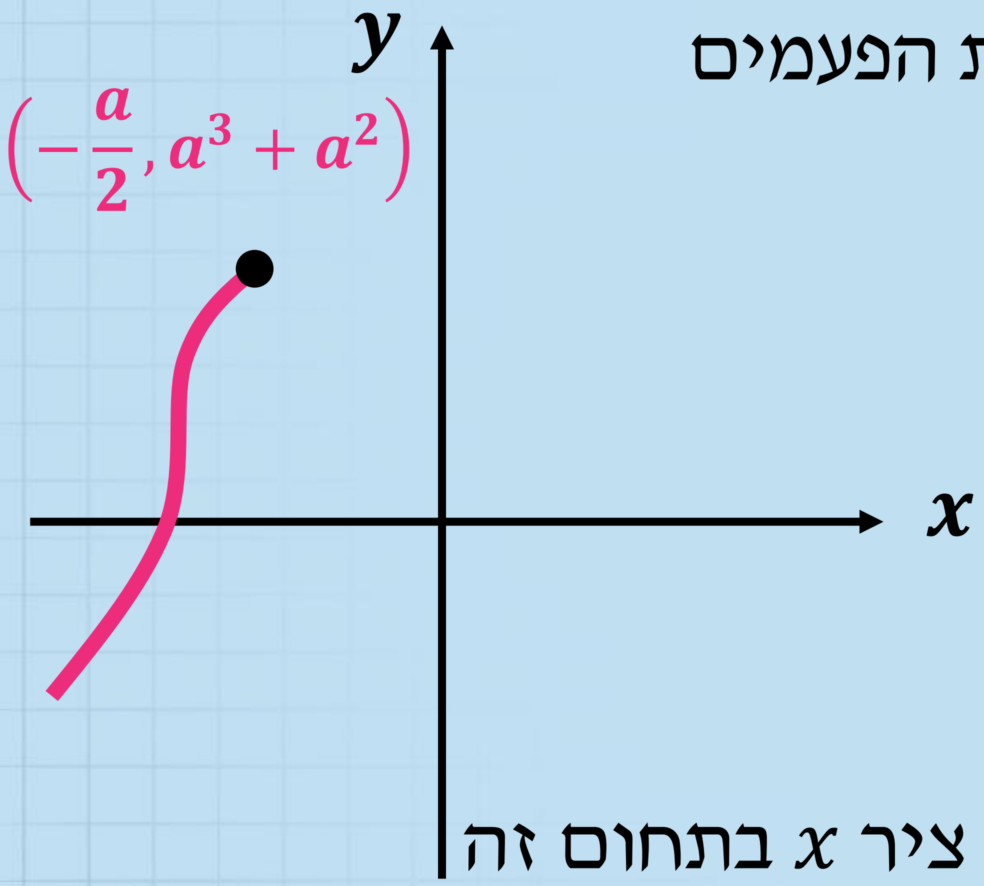
$$y = a^3 + a^2 > 0$$

$$x = -\frac{a}{2} < 0$$

נקודת המקסימום של הפונקציה נמצאת ברביע השני

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה אם למשוואה $f(x) = 0$ יש: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון



כמות הפתרונות של הפונקציה תגדיר את כמות הפעמים שהפונקציה חותכת את ציר x

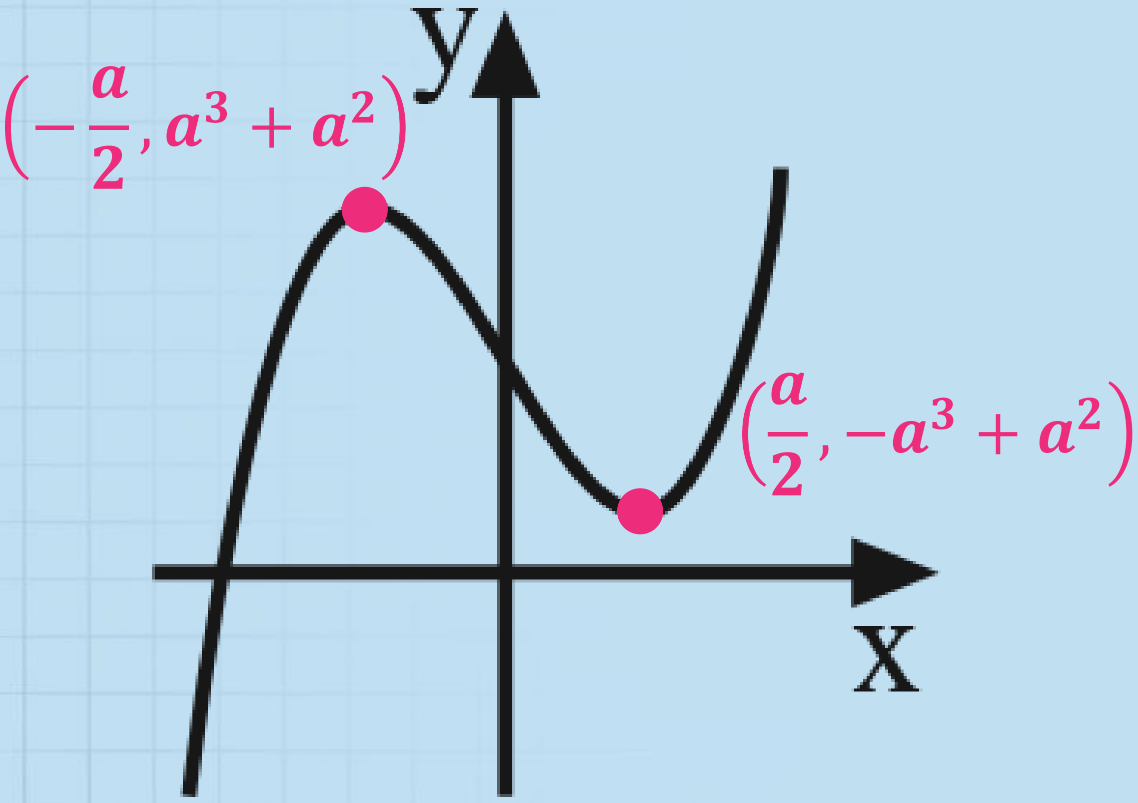
נקודת המקסימום $\left(-\frac{a}{2}, a^3 + a^2\right)$ **נמצאת ברביע השני**

עבור $x < -\frac{a}{2}$ הפונקציה עולה.
מכיוון שהיא מוגדרת לכל x , היא תחתוך את ציר x בתחום זה

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה אם למשוואה $f(x) = 0$ יש: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

(1) למשוואה $f(x) = 0$ פתרון אחד



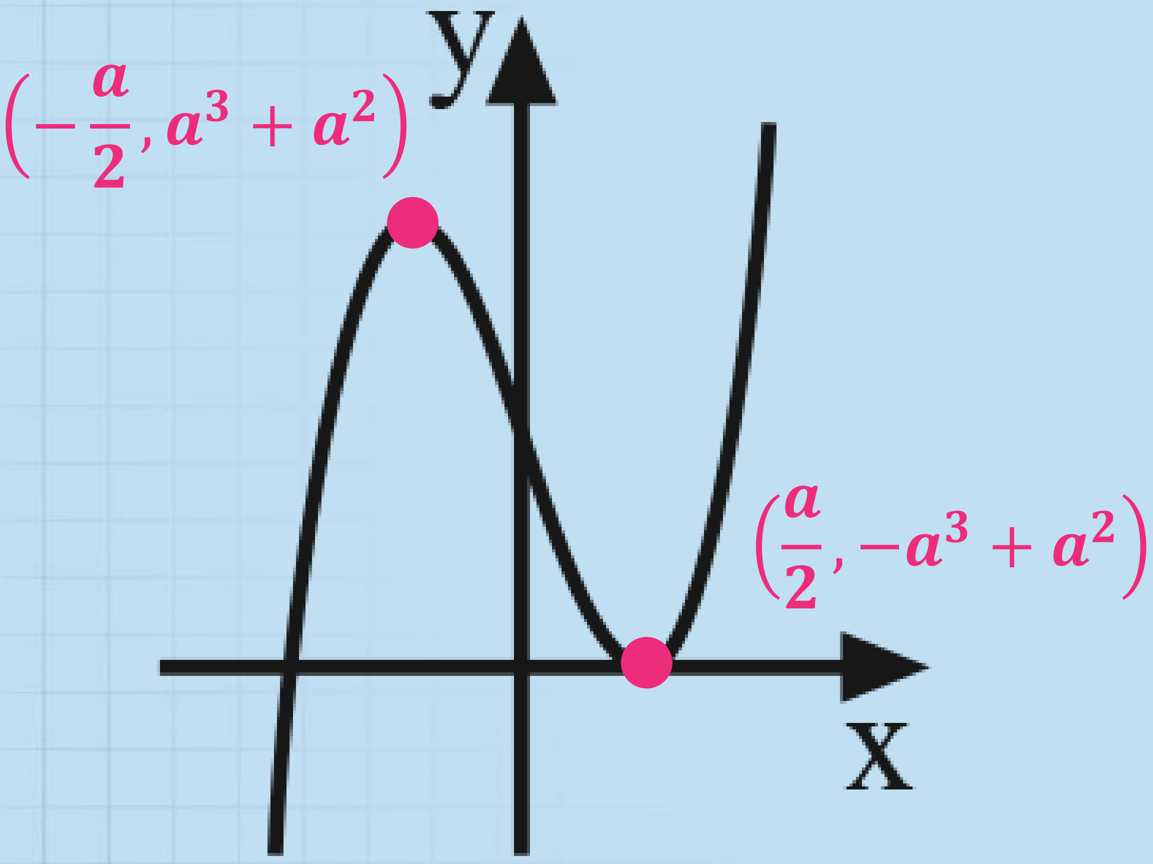
הפונקציה חותכת את ציר x **פעם אחת**

נקודת המינימום $\left(\frac{a}{2}, -a^3 + a^2\right)$

תמוקם ברביע הראשון

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה אם למשוואה $f(x) = 0$ יש: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון



(2) למשוואה $f(x) = 0$ שני פתרונות

הפונקציה חותכת את ציר x **פעמיים**

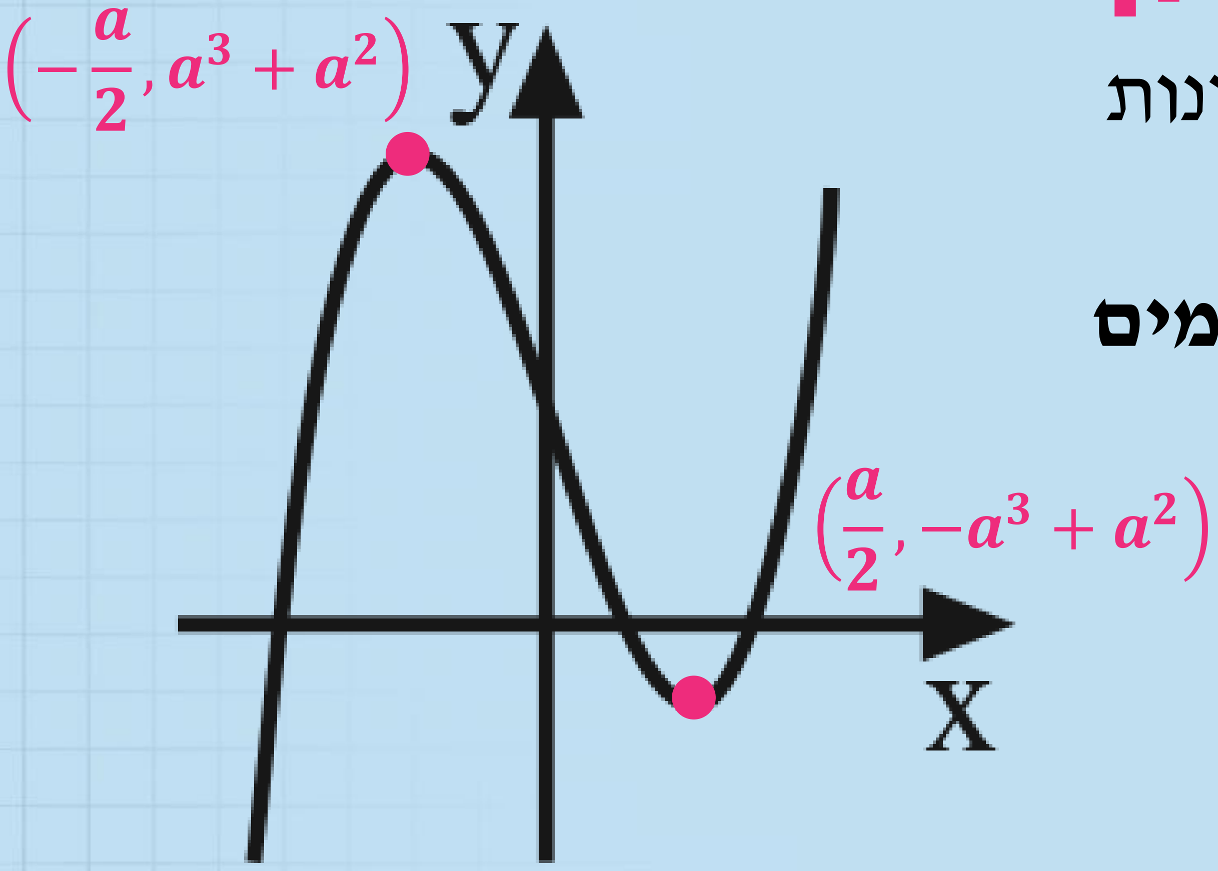
נקודת המינימום $\left(\frac{a}{2}, -a^3 + a^2\right)$

תמוקם על ציר x

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$. ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה אם למשוואה $f(x) = 0$ יש: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

(3) למשוואה $f(x) = 0$ שלושה פתרונות



הפונקציה חותכת את ציר x **שלוש פעמים**

נקודת המינימום $\left(\frac{a}{2}, -a^3 + a^2\right)$

תמוקם ברביע הרביעי

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

המשוואה $f(x) = 0$ היא משוואה ממעלה שלישית.

באמצעות הגרפים מסעיף ג', נוכל להתייחס לשיעור ה- y

של נקודת המינימום **כנקודת ייחוס**.

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

שיעור ה- y של נקודת המינימום: $y_{min} = -a^3 + a^2$

כאשר שיעור y זה ממקום מעל ציר ה- x , משמע ערכו חיובי,
למשוואה פתרון אחד

כאשר שיעור y זה ממקום על גבי ציר ה- x , משמע ערכו 0 ,
למשוואה שני פתרונות

כאשר שיעור y זה ממקום מתחת לציר ה- x , משמע ערכו שלילי,
למשוואה שלושה פתרונות

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

שיעור ה- y של נקודת המינימום: $y_{min} = -a^3 + a^2$

$$y_{min} = -a^3 + a^2 = a^2(-a + 1) = 0$$

$a = 1$ או $\cancel{a = 0}$

נתון $a > 0$

הביטוי a^2 חיובי לכל $a > 0$

סימן שיעור ה- y יקבע ע"י הביטוי $(-a + 1)$

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3-3a^2x+a^2$, $a > 0$.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

סימון שיעור ה- y יקבע ע"י הביטוי $(-a+1)$

שיעור ה- y חיובי, למשוואה פתרון יחיד

$$-a+1>0$$

$$1>a$$

שיעור ה- y שלילי, למשוואה שלושה פתרונות

$$-a+1<0$$

$$1<a$$

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x^3 - 3a^2x + a^2$, $a > 0$.

ד. מצא לאילו ערכי a יש למשוואה $f(x) = 0$: (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.

פתרון

לסיכום,

(1) עבור $0 < a < 1$ למשוואה $f(x) = 0$ פתרון אחד

(2) עבור $a = 1$ למשוואה $f(x) = 0$ שני פתרונות

(3) עבור $a > 1$ למשוואה $f(x) = 0$ שלושה פתרונות

בהצלחה