פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – תרגילים לחזרה עם פולינומים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 32, ת. 15

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה

15) א. הוכח שהפונקציה $f(x) = -x^3-2x+12$ יורדת לכל x.

ב. חשב את $f(2)$ ומצא עפ"י התוצאה וסעיף א' לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ היא חיובית ולאילו ערכי x היא שלילית.

ג. מצא בעזרת סעיפים א' ו-ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^2 + 12x - 7$, קבע אם היא מינימום או מקסימום והסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

15) א. הוכח שהפונקציה $f(x) = -x^3-2x+12$ יורדת לכל x.

פתרון

על מנת שהפונקציה תרד לכל x, עלינו להראות שהנגזרת, $f'(x)$ שלילית לכל x

$$f'(x) = -3x^2 - 2 = -(3x^2 + 2)$$

$f'(x) < 0$ **לכל** x

$\Downarrow$

$f(x)$ **יורדת לכל** x

ב. חשב את $f(2)$ ומצא עפ״י התוצאה וסעיף א׳ לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ היא חיובית ולאילו ערכי x היא שלילית.

פתרון

$$f(x) = -x^3 - 2x + 12$$

$$f(2) = -2^3 - 2 \cdot 2 + 12 = 0$$

עפ״י סעיף א׳ הפונקציה יורדת לכל x

ומכאן שעד ערך x שמניב 0 בפונקציה, הפונקציה **חיובית** $x < 2$

ולאחר ערך x שמניב 0 בפונקציה, הפונקציה **שלילית** $x > 2$

ג. מצא בעזרת סעיפים א' ו-ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^2 + 12x - 7$,
קבע אם היא מינימום או מקסימום והסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

פתרון

נדרוש:

$$g'(x) = 0$$

$$g'(x) = \frac{-4x^3}{4} - 2x + 12 = -x^3 - 2x + 12 \; = f(x)$$

עפ"י סעיף ב': $f(2) = 0$

$$g'(2) = 0$$

ג. מצא בעזרת סעיפים א' ו-ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^2 + 12x - 7$,

קבע אם היא מינימום או מקסימום והסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

פתרון

נבדוק את סוג הקיצון באמצעות הנגזרת השנייה:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = (f(x))' = -(3x^2 + 2)$$

עפ"י סעיף א' ביטוי זה **שלילי** לכל x , ובפרט עבור $x = 2$

$$\Downarrow$$

בנקודה $x = 2$ ל- $g(x)$ נקודת קיצון מסוג מקסימום

ג. מצא בעזרת סעיפים א' ו-ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^2 + 12x - 7$,
קבע אם היא מינימום או מקסימום והסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

פתרון

בנקודה $x = 2$ ל- $g(x)$ נקודת קיצון מסוג מקסימום

נמצא את שיעור ה- y של הנקודה באמצעות הפונקציה $g(x)$:

$$g(2) = -\frac{2^4}{4} - 2^2 + 12 \cdot 2 - 7 = 9$$

בנקודה $(2,9)$ ל-פונקציה $g(x)$ נקודת קיצון מסוג מקסימום

ג. מצא בעזרת סעיפים א' ו-ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^2 + 12x - 7$,
קבע אם היא מינימום או מקסימום והסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

פתרון

פונקציית הנגזרת של $g(x)$, היא למעשה הפונקציה $f(x)$

עפ"י הסעיפים הקודמים, $f(x)$ יורדת לכל x ומכאן שאם קיים ערך x

שמאפס אותה, הוא היחיד.

כלומר, **לא** קיימים ערכי x נוספים שמאפסים את הנגזרת $g'(x) = f(x)$

בהצלחה