הקנייה

הנגזרת של פונקציה מורכבת עם מעריך שלם ושלילי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 22–23

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

נגזרת הפונקציה $f(x) = x^{-n}$ (n מספר טבעי)

כדי למצוא את הנגזרת של פונקציה מהצורה $f(x) = x^{-n}$ ניעזר בנגזרת של מנת שתי פונקציות, נסתמך על כך ש-$(x^n)' = nx^{n-1}$ עבור n טבעי, ניעזר בכללי החזקות ונקבל:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

$$\boxed{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}}$$

הקנייה

הערות:

א) הנוסחה שקיבלנו מראה שהנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה **גם** כאשר n **שלם** ושלילי.

ב) מהנוסחה הנ"ל נקבל את **הנוסחה השימושית** הבאה: $(x \neq 0)$ $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

הקנייה

הערות:

ג) בהסתמך על הנוסחה $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ שראינו בהערה ב׳

והנגזרת של פונקציה מורכבת נוכל לקבל את **הנוסחה** הבאה: $\boxed{\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = -\frac{a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}}$.

נוסחה זו מאפשרת לגזור בקלות פונקציות מהצורה $y = \frac{a}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0)$

מבלי להיעזר בנגזרת של פונקציית מנה. (ראה דוגמא ד׳).

הקנייה

דוגמא ג׳:

מצא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

פתרון:

דרך א׳:

נכתוב $f(x) = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$, נגזור רגיל ונקבל:

$$\left(\frac{3}{x^2}\right)' = (3x^{-2})' = -2 \cdot 3x^{-3} = -\frac{6}{x^3}.$$

הקנייה

דוגמא ג':

מצא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

פתרון:

דרך ב':

נגזור בעזרת נגזרת של מנת שתי פונקציות:

$$\left(\frac{3}{x^2}\right)' = \frac{0 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}.$$

הקנייה

דוגמא ג':

מצא את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

פתרון:

דרך ג':

בעזרת הנוסחה שבהערה ג': $\boxed{\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = -\frac{a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}}$.

$$\left(\frac{3}{x^2}\right)' = -\frac{3 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{3 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}.$$

הקנייה

דוגמא ד׳:

גזור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ (שהופיעה בדוגמא ב׳) בעזרת הנוסחה שבהערה ג׳.

פתרון:

$$f'(x) = -\frac{1\cdot(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2} = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x+3}{(x^2-3x)^2}.$$

בהצלחה