הקנייה

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 16–18

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות גזירות שווה לנגזרת הפונקציה הראשונה כפול הפונקציה השנייה ועוד הפונקציה הראשונה כפול נגזרת הפונקציה השנייה.

אם $f(x)$ ו-$g(x)$ הן שתי פונקציות אז הנוסחה היא:

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

הקנייה

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

הוכחה:

נחשב את הנגזרת בנקודה $(x_1\,,\, f(x_1)\,g(x_1))$:

$$(f(x_1)\cdot g(x_1))' = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_1)\,g(x_1)}{x-x_1} =$$

נחסר ונחבר את הביטוי $f(x_1)\,g(x)$ ונקבל:

$$= \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_1)\,g(x) + f(x_1)\,g(x) - f(x_1)\,g(x_1)}{x-x_1} =$$

הקנייה

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

הוכחה:

ניעזר בפירוק לגורמים:

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{(f(x)-f(x_1))\,g(x) + f(x_1)\,(g(x)-g(x_1))}{x-x_1} =$$

לפי חוקי הגבולות נקבל:

$$= \lim_{x \to x_1} g(x) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} + f(x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} =$$

הקנייה

הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

הוכחה:

$$= g(x_1)\, f'(x_1) + f(x_1)\, g'(x_1)$$

כלומר לכל x: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

הקנייה

דוגמא א':

גזור את הפונקציה $y = (2x+1)(x^2-3x)$ בשתי דרכים:

א. ע"י שתבצע תחילה את המכפלה ואחר כך תגזור.

ב. עפ"י הנוסחה לנגזרת של מכפלת שתי פונקציות.

הקנייה

גזור את הפונקציה $y=(2x+1)(x^2-3x)$

פתרון:

א. אם נבצע את המכפלה נקבל:

$$y=(2x+1)(x^2-3x)=2x^3-6x^2+x^2-3x=2x^3-5x^2-3x$$

$$y'=6x^2-10x-3.$$

הקנייה

גזור את הפונקציה $y = (2x+1)(x^2-3x)$

פתרון:

ב. אם נגזור עפ"י הנוסחה לנגזרת של מכפלת שתי פונקציות נקבל:

$$f'(x) = (2x+1)'\cdot(x^2-3x)+(2x+1)\cdot(x^2-3x)' =$$

$$= 2\cdot(x^2-3x)+(2x+1)(2x-3) =$$

$$= 2x^2-6x+4x^2-6x+2x-3 = 6x^2-10x-3$$

כלומר קיבלנו את אותה התוצאה.

הקנייה

את החשיבות של הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות נראה בהמשך.

מהנוסחה שקיבלנו ניתן לקבל את הנוסחה הבאה לנגזרת של מכפלת **שלוש פונקציות**:

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)}$$

הקנייה

דוגמא ב':

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה $(1,2)$ שעל הגרף היא -4. כמו כן נתון $g(x) = x^3$. חשב את הנגזרת של הפונקציה $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ בנקודה $x = 1$.

פתרון:

$$h'(1) = f'(1)\cdot g(1) + f(1)\cdot g'(1).$$

עפ"י הנתון מתקיים $f(1) = 2$, $f'(1) = -4$.

$$g(1) = 1^3 = 1$$

$$g'(x) = 3x^2,$$

$$g'(1) = 3$$

הקנייה

דוגמא ב':

הנגזרת של פונקציה $f(x)$ בנקודה $(1, 2)$ שעל הגרף היא -4. כמו כן נתון $g(x) = x^3$. חשב את הנגזרת של הפונקציה $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ בנקודה $x = 1$.

פתרון:

$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1).$$

$$\Downarrow$$

$$= -4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 2$$

בהצלחה