פתרון תרגיל

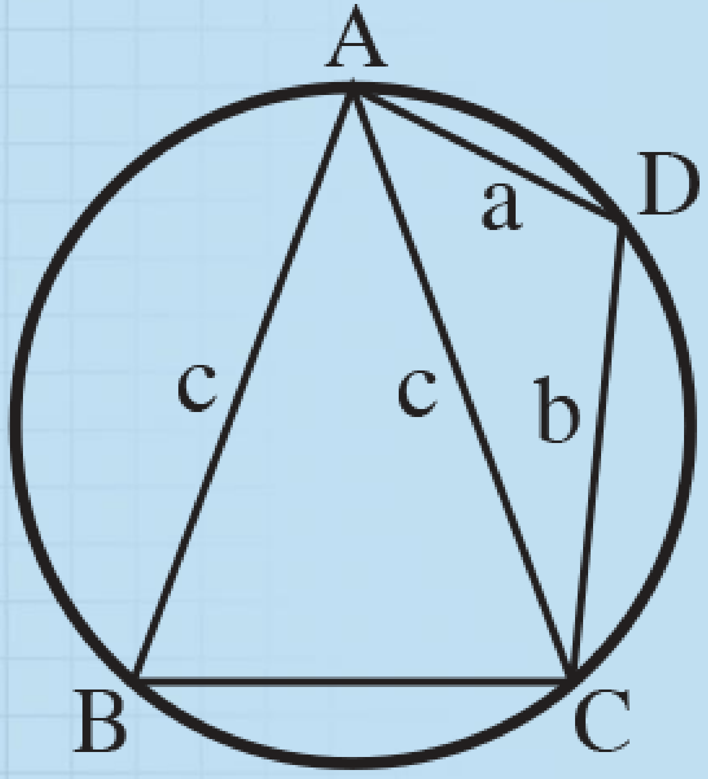
מעגל – משפט הקוסינוסים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 393, ת. 12

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה



12) ABCD הוא מרובע החסום במעגל.

נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.

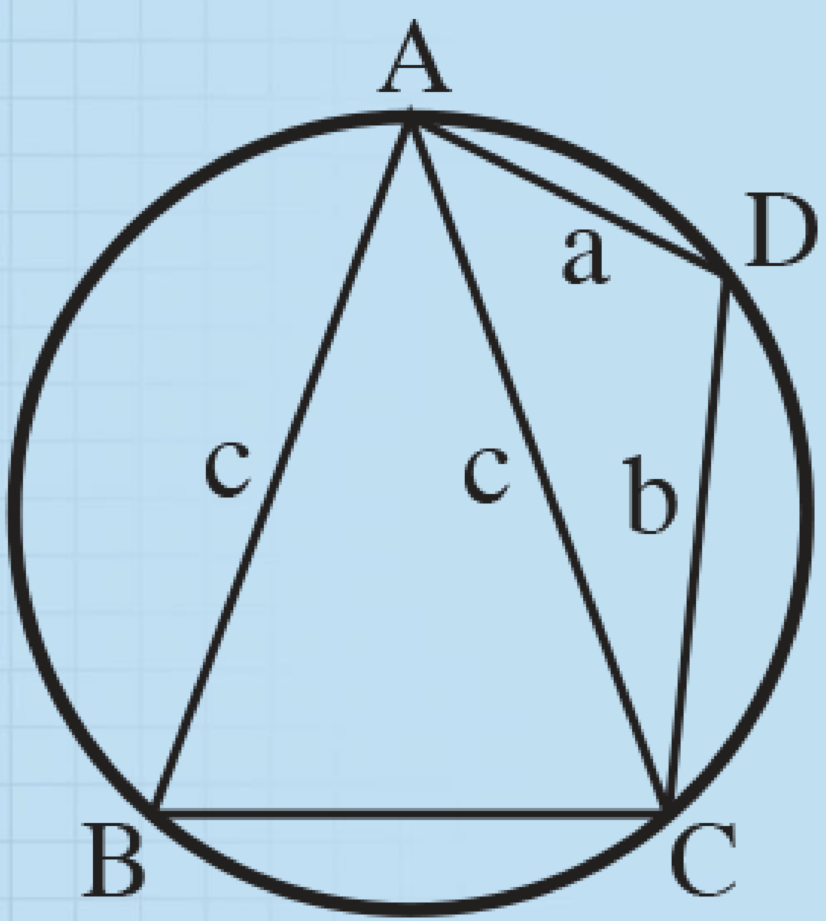
א. הבע באמצעות a, b ו-c את $\cos(\measuredangle ADC)$.

ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.

א. הבע באמצעות a, b ו-c את $\cos(\measuredangle ADC)$.

פתרון



משפט הקוסינוסים : ΔADC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \measuredangle ADC$$

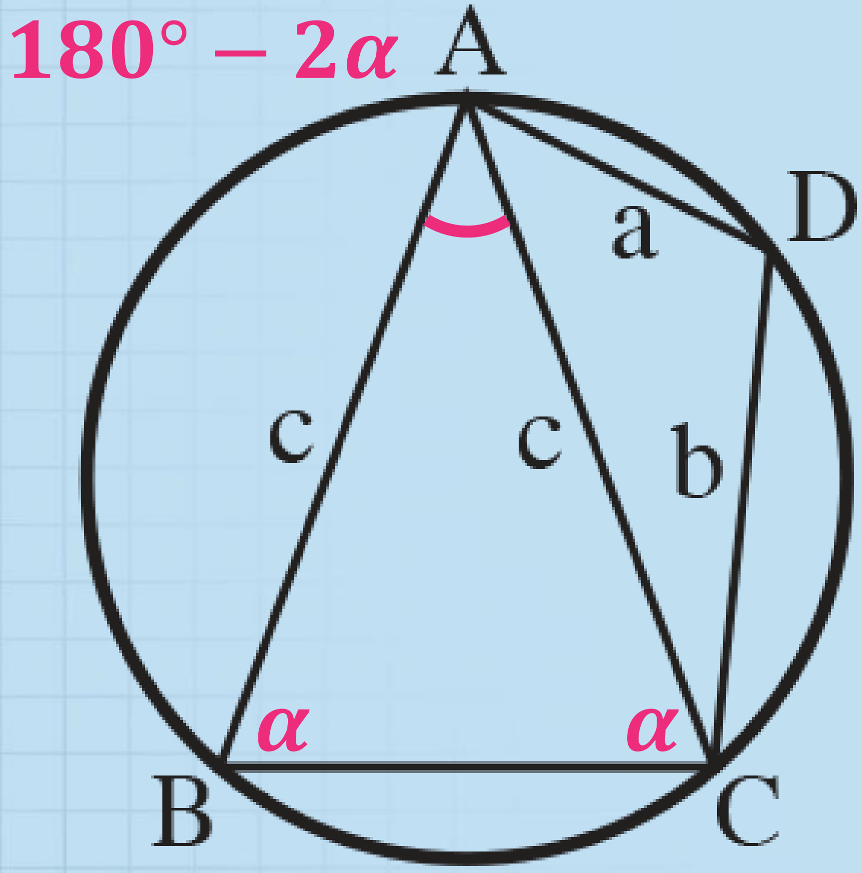
$$2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \measuredangle ADC = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos \measuredangle ADC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

מ.ש.ל א'

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.
ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון



נסמן: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha$

באותו משולש, מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות

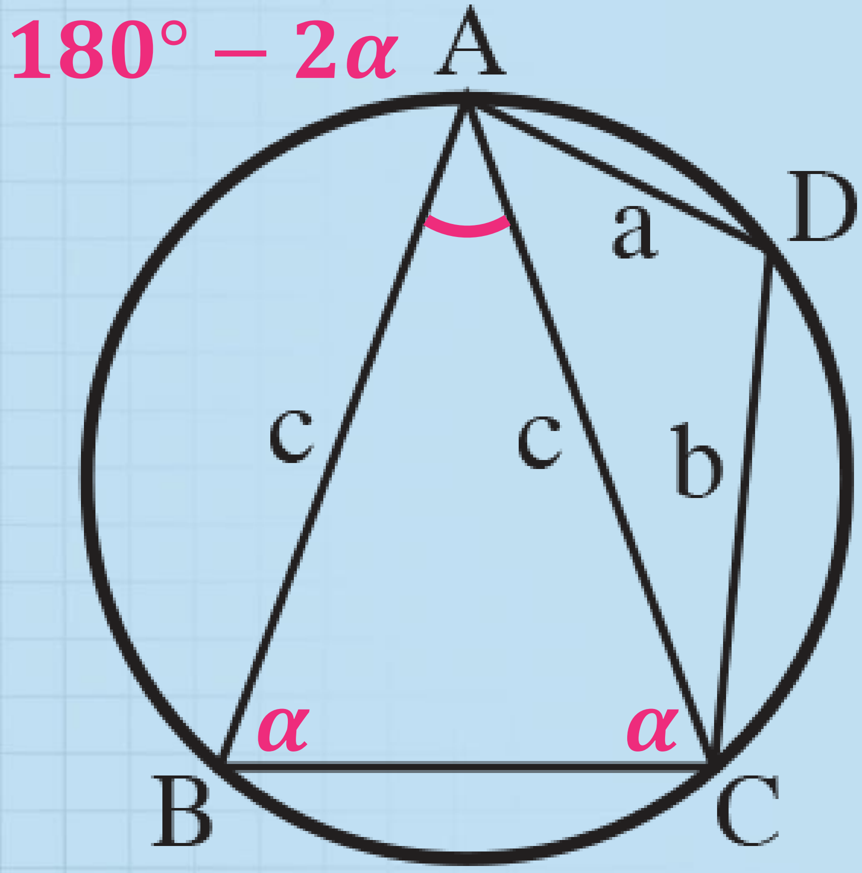
$\sphericalangle BAC = 180° - 2\alpha$

משלימה ל- 180° במשולש ΔBAC

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.

ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון



משפט הקוסינוסים : ΔBAC

$$BC^2 = c^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot c\cdot \cos(180° - 2\alpha)$$

$$= 2c^2 - 2c^2\cdot\cos(180° - 2\alpha)$$

$$= 2c^2[1 - \cos(180° - 2\alpha)]$$

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.
ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון

נבחן את הביטוי: $\cos(180° - 2\alpha)$

לפי הזהות: $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $= -\cos 2\alpha$

לפי הזהות של זווית כפולה: $= -(2\cos^2\alpha - 1)$

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.

ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון

$$BC^2 = 2c^2[1 - \cos(180° - 2\alpha)] = 2c^2[1 - \cdot - (2\cos^2\alpha - 1)]$$

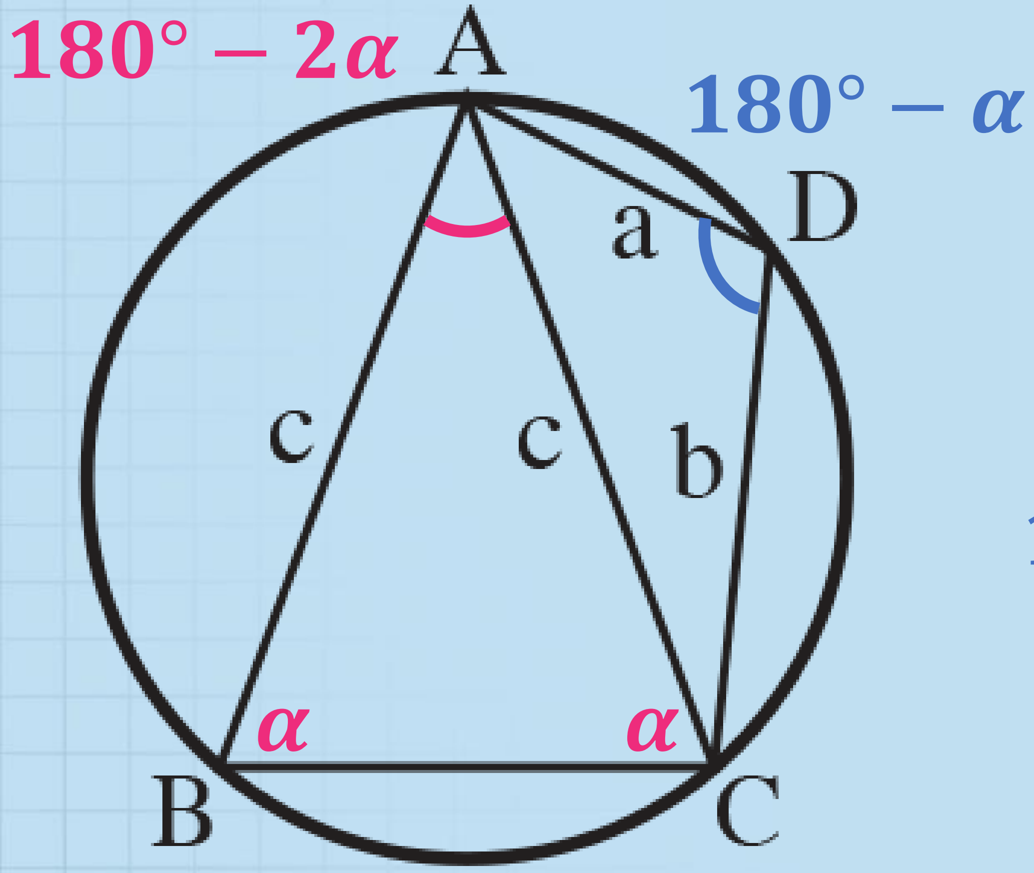
$$= 2c^2[1 + (2\cos^2\alpha - 1)] = 2c^2 \cdot 2\cos^2\alpha = 4c^2\cos^2\alpha$$

$$0 < BC = 2\, c\, cos\alpha$$

נקשר את הביטוי $cos\alpha$ לביטוי שמצאנו בסעיף א'

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.
ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון



$$\measuredangle ABC = \alpha$$

⬇

$$\measuredangle ADC = 180° - \alpha$$

זוויות נגדיות במרובע חסום משלימות ל- 180°

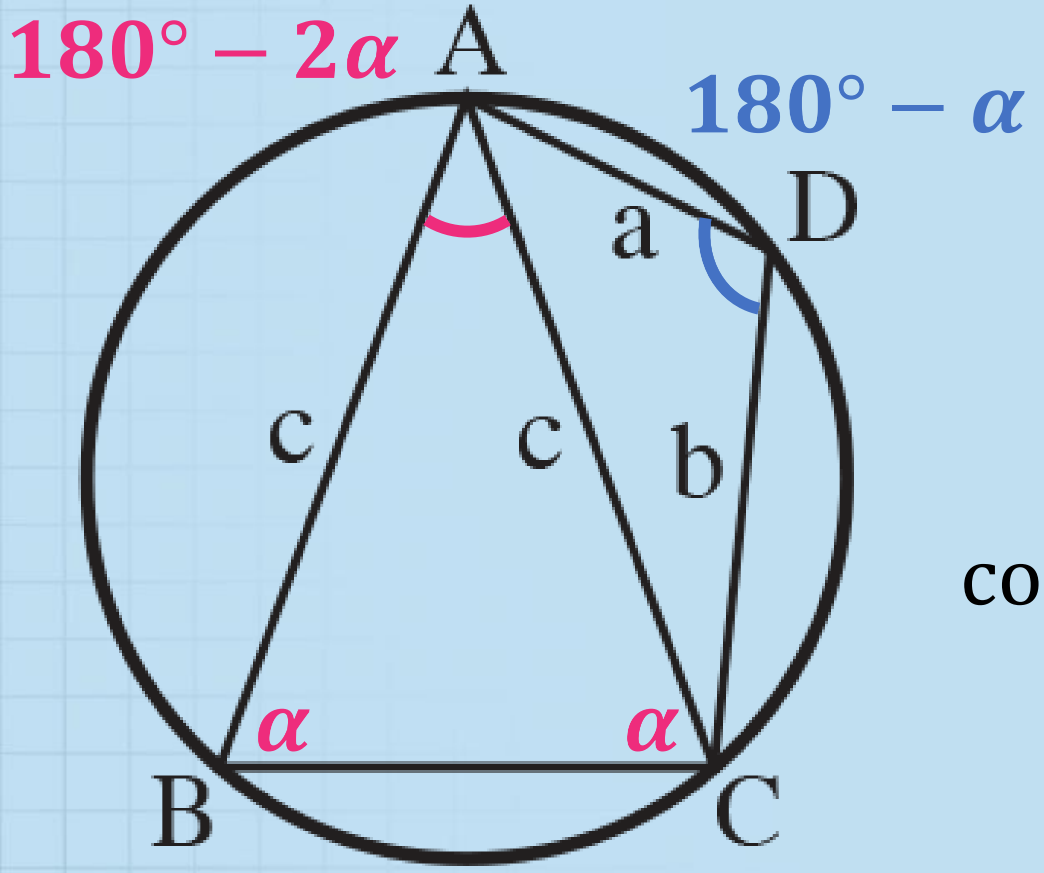
⬇

$$\cos \measuredangle ADC = \cos(180° - \alpha)$$

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.

ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון



$$\cos\sphericalangle ADC = \cos(180° - \alpha)$$

לפי הזהות: $\boldsymbol{-\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha}$

$$\cos\alpha = -\cos\sphericalangle ADC = -\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$= \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)$$

ABCD הוא מרובע החסום במעגל. נתון: $AD = a$, $CD = b$, $AB = AC = c$.
ב. הבע באמצעות a, b ו-c את הצלע BC.

פתרון

$$BC = 2\,c\,cos\alpha = 2c \cdot \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) = \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{ab}$$

מ.ש.ל ב'

בהצלחה