הקנייה

נגזרת הפונקציה המעריכית

$f(x) = e^x$ ו– $y = e^{f(x)}$

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 219

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

הקנייה

הנגזרת-פונקציות מעריכיות

נגזרת הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$

נעבור עכשיו לחישוב הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה כלשהי x_1.

כדי למצוא את הנגזרת בנקודה x_1 נחשב את הגבול של המנה $\frac{e^x - e^{x_1}}{x - x_1}$ כאשר x שואף ל-x_1. נסמן $x - x_1 = h$ (h מספר קטן), נסתמך על חוקי החזקה ונקבל:

$$\frac{e^x - e^{x_1}}{x - x_1} = \frac{e^{x_1+h} - e^{x_1}}{h} = \frac{e^{x_1}(e^h - 1)}{h} = e^{x_1} \cdot \frac{e^h - 1}{h}.$$

הקנייה

הגודל e^{x_1} הוא **קבוע** ונותר לחשב למה שואפת המנה $\frac{e^h-1}{h}$.

אם x שואף ל-x_1 אז h שואף ל-0, כלומר יש לחשב את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$.

את הגבול ניתן לרשום גם באופן הבא: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h-0}$ כפי שניתן לראות, זהו בדיוק **ערך** **הנגזרת** של הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $x=0$. ערך זה, כפי שראינו, שווה ל-1.

כלומר הגבול של המנה $\frac{e^x-e^{x_1}}{x-x_1}$ כאשר x שואף ל-x_1 הוא $e^{x_1}\cdot 1$ ז"א $(e^{x_1})'=e^{x_1}$.

הקנייה

לסיכום:

נגזרת הפונקציה $f(x) = e^x$ שווה לפונקציה עצמה.

הנוסחה: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

הנגזרת של הפונקציה $y = e^{f(x)}$

בעזרת הנגזרת של **פונקציה מורכבת** נוכל לרשום גם את הנוסחה הבאה:

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

הקנייה

הערה: כדי לגזור פונקציה כמו הפונקציה $y = \frac{x}{e^x}$ ניתן לרשום אותה בצורה $y = x \cdot e^{-x}$ ולגזור אותה בעזרת הנגזרת של מכפלת פונקציות.

דוגמאות – נגזרות של פונקציות מעריכיות

נביא דוגמאות לגזירה של פונקציות הכוללות פונקציות מעריכיות.

דוגמא:

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = 2e^x + 1$

(2) $y = x^3 e^x$

(3) $y = e^{x^2 - x}$

(4) $y = \frac{2x+1}{e^{2x}+1}$

הקנייה

פתרונות:

(1) $y' = (2e^x+1)' = (2e^x)' + 1' = 2(e^x)' + 0 = 2e^x$.

(2) עפ"י נגזרת של מכפלת שתי פונקציות נקבל:

$y' = (x^3e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2+x^3)e^x$.

(3) עפ"י נגזרת של פונקציה מורכבת נקבל:

$y' = (e^{x^2-x})' = e^{x^2-x} \cdot (x^2-x)' = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$.

הקנייה

(4) עפ"י נגזרת של מנת שתי פונקציות נקבל:

$$y' = \left(\frac{2x+1}{e^{2x}+1}\right)' = \frac{(2x+1)'\cdot(e^{2x}+1)-(2x+1)\cdot(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(e^{2x}+1)-(2x+1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}+2-4xe^{2x}-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2-4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

בהצלחה