פתרון תרגיל

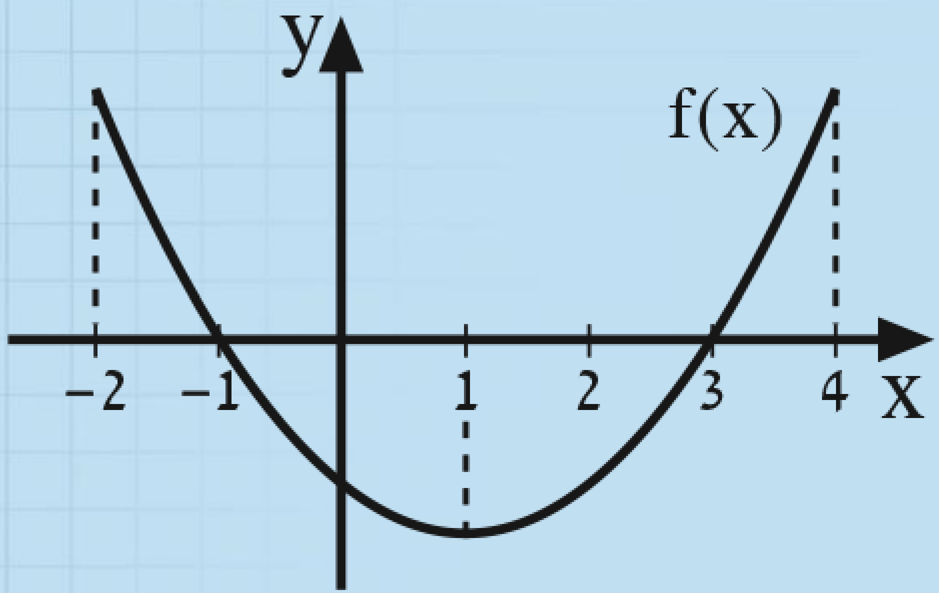
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי–תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 332, ת. 36

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה



36) בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$ בתחום $-2 \le x \le 4$. (הישרים המקווקווים מאונכים לציר ה-x).

א. מצא ע"י התבוננות בציור את:

(1) נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

(2) תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה פונקציה $g(x)$ שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$.

מצא בהסתמך על התשובות לסעיף א' את:

(1) שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

(2) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

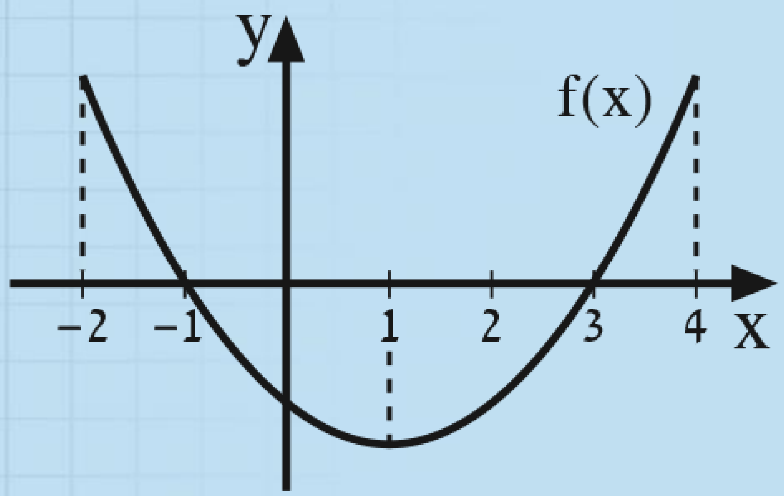
ג. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנ"ל בהנחה ש-$g(1) = 0$.

ד. $h(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $\mathbf{h(x) = -f'(x)}$. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום הנ"ל. (הנח שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות).

א. מצא ע"י התבוננות בציור את:

(1) נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

(2) תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.



פתרון

<u>סעיף א':</u>

(1) נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה-x הן:

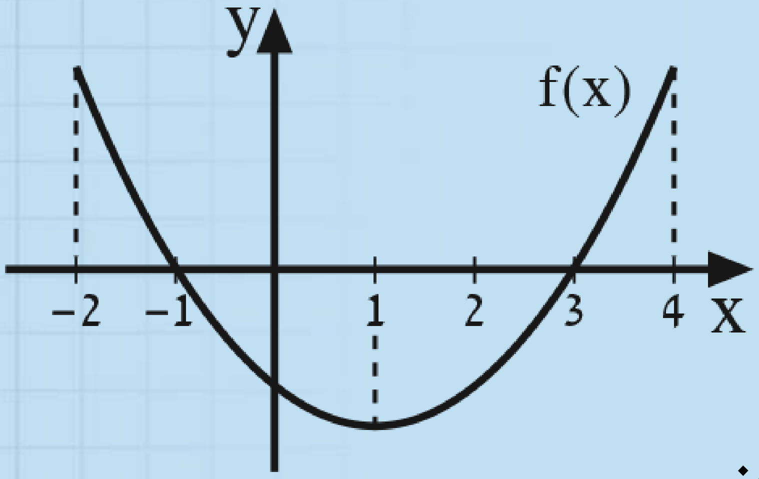
$(-1,0)$ ו- $(3,0)$

(2) <u>תחומי חיוביות</u>: $3 < x < 4$ או $-2 < x < -1$

<u>תחומי שליליות</u>: $-1 < x < 3$

ב. נתונה פונקציה $g(x)$ שמקיימת: $g'(x) = f(x)$.
מצא בהסתמך על התשובות לסעיף א' את:
(1) שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
(2) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון



סעיף ב':

נתון כי: $g'(x) = f(x)$

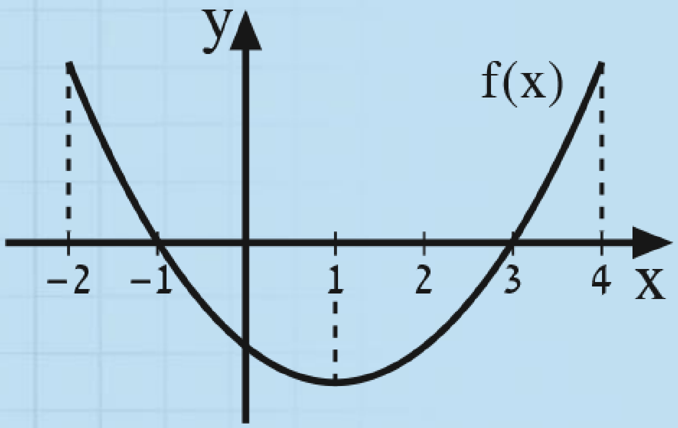
לכן הפונקציה $f(x)$ היא **פונקציית הנגזרת** של $g(x)$.

(1) לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון פנימיות כאשר $f(x)$ **מתאפסת ומשנה סימן.**

זה קורה כאשר $x = -1$ ו- $x = 3$.

ב. נתונה פונקציה $g(x)$ שמקיימת: $g'(x) = f(x)$.
מצא בהסתמך על התשובות לסעיף א' את:
(1) שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
(2) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון



ב- $x = -1$ הפונקציה $f(x)$ משנה סימן **מחיובית לשלילית**.

לכן $g(x)$ משנה התנהגות **מעלייה לירידה**.

<u>מסקנה</u>: ב- $x = -1$ יש ל-$g(x)$ **<u>נקודת מקסימום</u>**.

ב- $x = 3$ הפונקציה $f(x)$ משנה סימן **משלילית לחיובית**.

לכן $g(x)$ משנה התנהגות **מירידה לעלייה**.

<u>מסקנה</u>: ב- $x = 3$ יש ל-$g(x)$ **<u>נקודת מינימום</u>**.

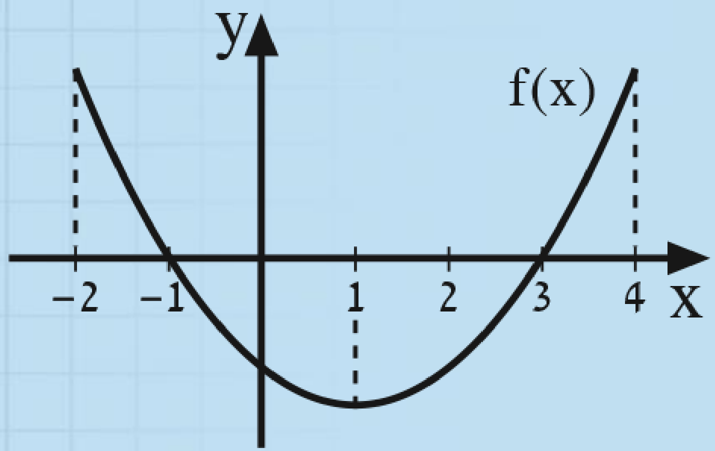
ב. נתונה פונקציה $g(x)$ שמקיימת: $g'(x) = f(x)$.

מצא בהסתמך על התשובות לסעיף א' את:

(1) שיעורי ה-x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

(2) תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

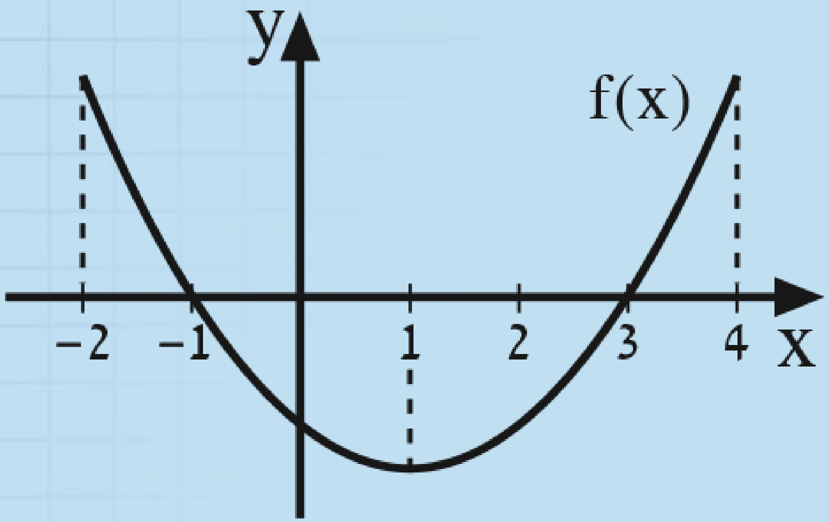


(2) תחומי העלייה של $g(x)$: $3 < x < 4$ או $-2 < x < -1$

תחומי הירידה של $g(x)$: $-1 < x < 3$

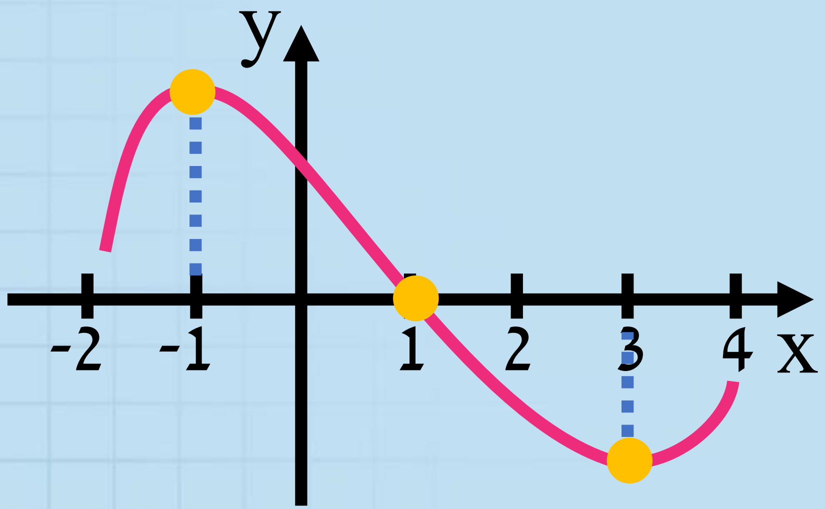
ג. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנ"ל בהנחה ש-$g(1) = 0$.

פתרון



<u>סעיף ג':</u>

בנוסף לנקודות הקיצון ולתחומי העלייה והירידה של $g(x)$, ידוע לנו גם כי: $g(1) = 0$



ד. $h(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $h(x) = -f'(x)$. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום הנ"ל. (הנח שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות).

פתרון

<u>סעיף ד':</u>

נתון כי: $h(x) = -f'(x)$

לכן $h(x)$ היא השיקוף סביב ציר ה-x של $f'(x)$.

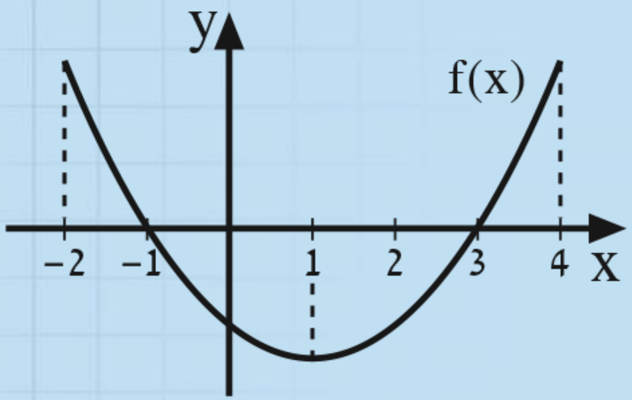
לכן נעבוד בשני שלבים:

1. נשרטט את $f'(x)$.

2. נשקף את $f'(x)$ סביב ציר ה-x.

ד. $h(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $h(x) = -f'(x)$. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום הנ"ל. (הנח שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות).

פתרון

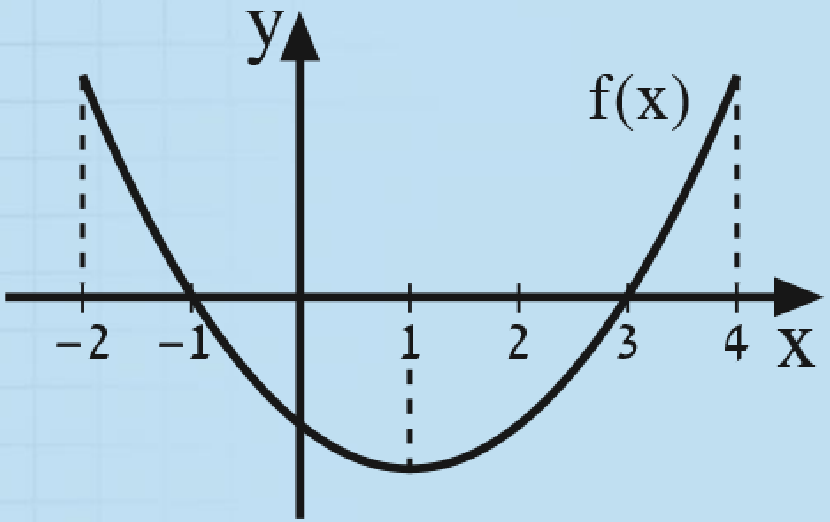


נסיק מהם תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ על-פי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

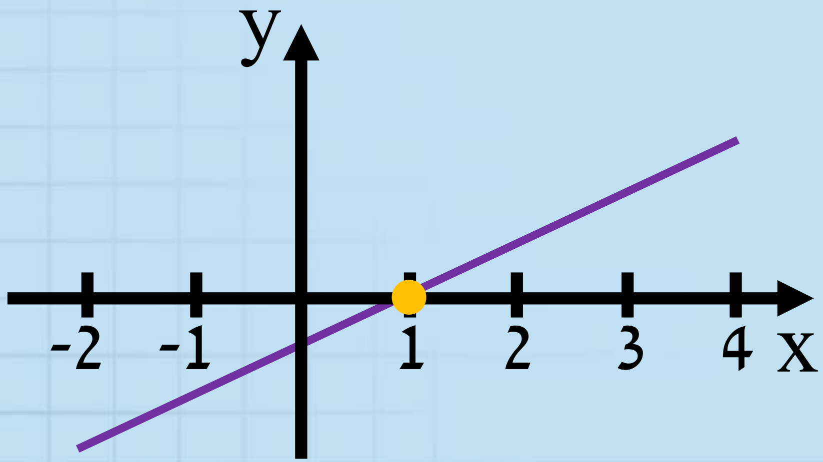
תחום העלייה של $f(x)$ הוא: $1 < x < 4$. לכן זהו **תחום החיוביות** של $f'(x)$.
תחום הירידה של $f(x)$ הוא: $-2 < x < 1$. לכן זהו **תחום השליליות** של $f'(x)$.
כמו כן, בנקודה $x = 1$ יש ל-$f(x)$ **נקודת קיצון פנימית**. לכן $f'(x)$ מתאפסת ב- $x = 1$.

ד. $h(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $h(x) = -f'(x)$. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום הנ״ל. (הנח שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות).

פתרון



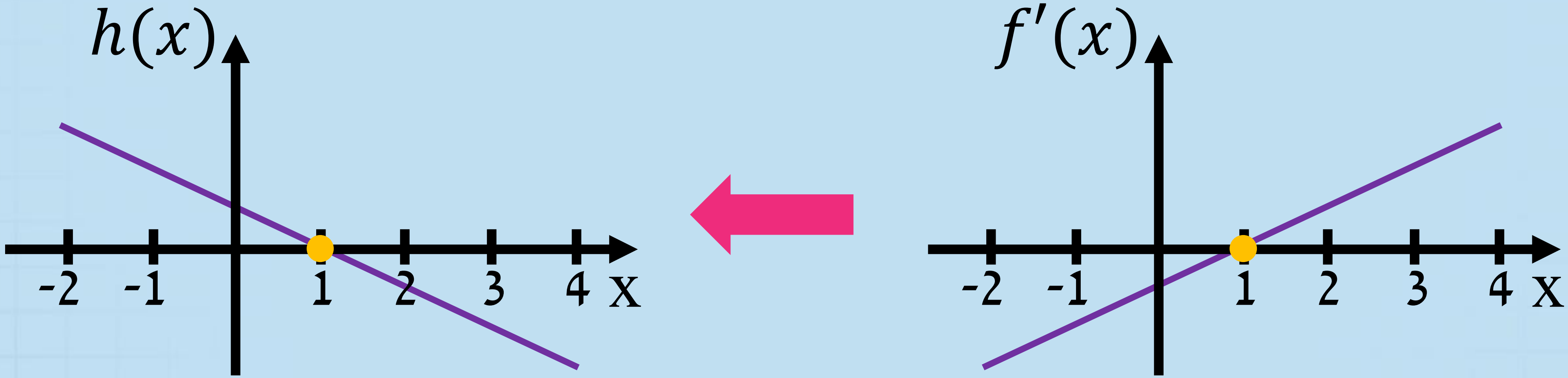
כמו כן, יש להניח של- $f'(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות.



ד. $h(x)$ היא הפונקציה שמקיימת: $h(x) = -f'(x)$. שרטט (בצורה כללית) את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום הנ״ל. (הנח שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות).

פתרון

כעת יש לשקף את הגרף של $f'(x)$ סביב ציר ה-x, כדי לקבל את הגרף של $h(x)$.



בהצלחה