פתרון תרגיל

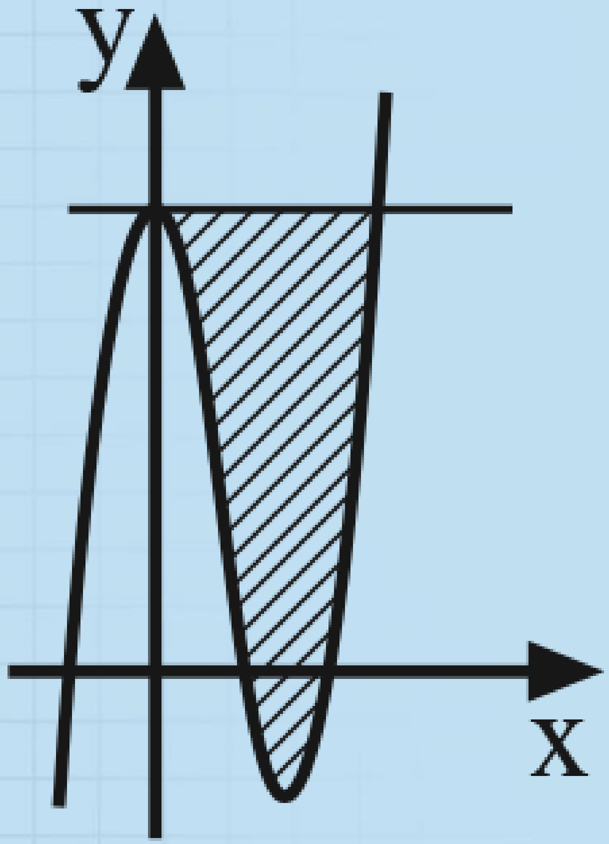
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי–תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 331, ת. 33

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה



33) נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$.

א. הוכח שנקודת המקסימום היא על ציר ה-y ומצא את c.

ב. מצא את a ו-b.

ג. מצא את השטח המוגבל ע"י הישר $y = 10$ וע"י גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

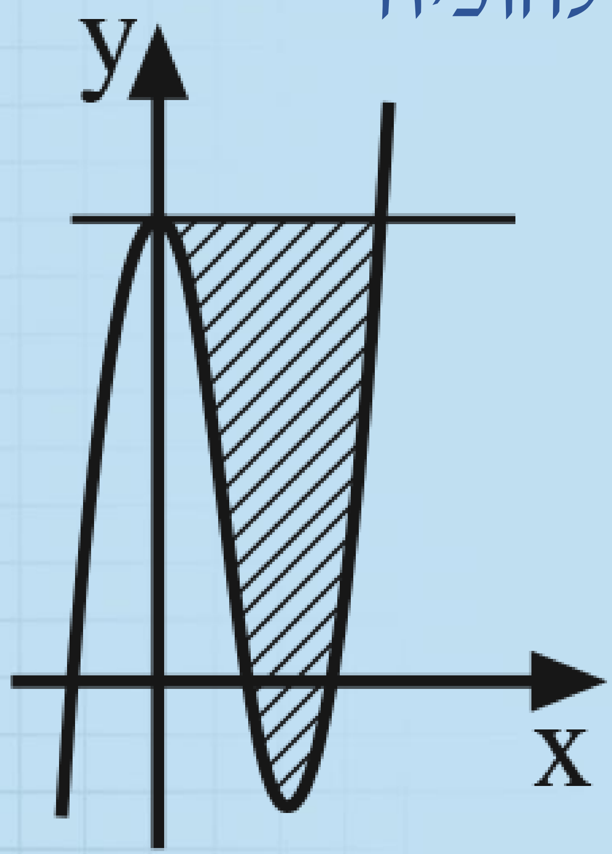
נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.

משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. א. הוכח שנקודת המקסימום היא על ציר ה- y ומצא את c.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

כדי להוכיח שנקודת המקסימום נמצאת על ציר ה-y, יש להוכיח כי שיעור ה- x שלה הוא **אפס**.



לשם כך, **נשווה את הנגזרת של הפונקציה לאפס**.

$$y = ax^3 + bx^2 + c$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx$$

$$3ax^2 + 2bx = 0$$

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. א. הוכח שנקודת המקסימום היא על ציר ה-y ומצא את c.

פתרון

$$x(3ax+2b)=0$$

רואים שיש שני שיעורי x שונים שבהם נגזרת הפונקציה שווה לאפס. לכן יש שתי נקודות שחשודות כקיצון.

בנוסף, נתון שלפונקציה יש שתי נקודות קיצון.

מסקנה: שתי הנקודות החשודות כקיצון הן באמת נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. א. הוכח שנקודת המקסימום היא על ציר ה-y ומצא את c.

פתרון

$$x(3ax+2b)=0$$

$$x=0 \qquad\qquad 3ax+2b=0$$

נתון שהנקודה $(2,-2)$ היא נקודת מינימום, ושנקודת הקיצון השנייה היא נקודת מקסימום.

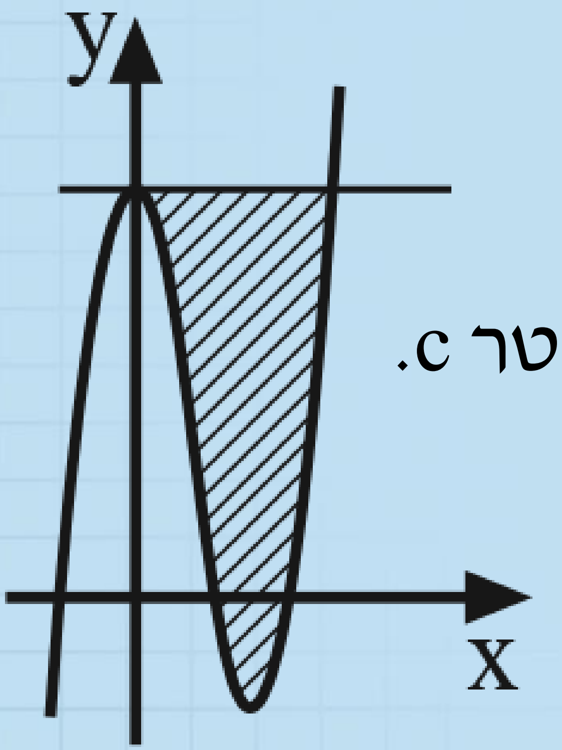
מסקנה: ב- $x=0$ יש לפונקציה מקסימום.

וכך הוכחנו כי נקודת המקסימום **נמצאת על ציר ה-x.**

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. א. הוכח שנקודת המקסימום היא על ציר ה-y ומצא את c.

פתרון

כמו כן, נתון **שמשוואת המשיק** לפונקציה בנקודת **המקסימום היא:** $y = 10$.



מסקנה: נקודת המקסימום היא: $(0,10)$.

נציב את הנקודה הנ"ל בפונקציה כדי למצוא את ערך הפרמטר c.

$$y = ax^3 + bx^2 + c$$

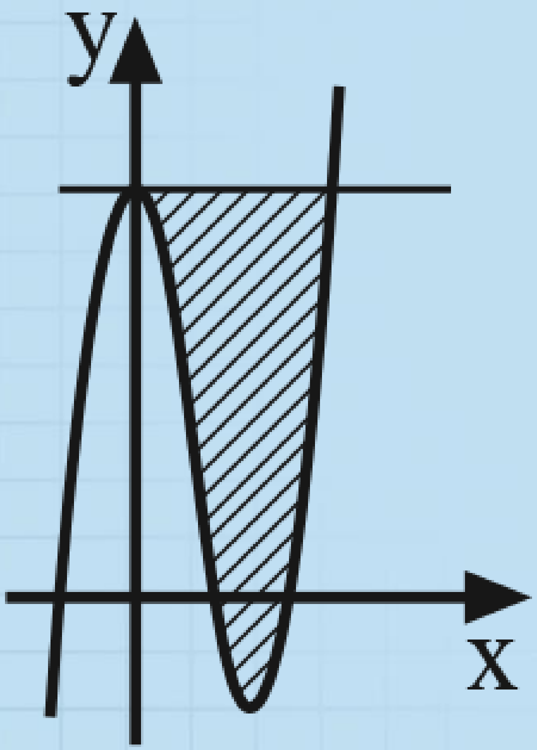
$$\boxed{c = 10}$$

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. ב. מצא את a ו-b.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

כדי למצוא את a ואת b, נשתמש בנתון שלפיו יש לפונקציה נקודת מינימום ב- $(2,-2)$.



$$x(3ax+2b)=0$$

$$x=0$$

$$3ax+2b=0$$
$$3ax=-2b$$

$$3a\cdot 2=-2b$$
$$-3a=b$$

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. ב. מצא את a ו-b.

פתרון

כעת נציב את שיעורי הנקודה $(2,-2)$ בפונקציה המקורית,

ונציב גם $c = 10$ בפונקציה המקורית. $\boldsymbol{y = ax^3 + bx^2 + c}$

$$-2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + 10$$

$$8a + 4b = -12$$

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$. ב. מצא את a ו-b.

פתרון

קיבלנו מערכת בשני נעלמים:

$$\begin{cases} -3a = b \\ 8a + 4b = -12 \end{cases}$$

פותרים את המערכת הנ״ל, ומקבלים: $\boxed{a = 3 \quad , b = -9.}$

נציב את הערכים האלה בפונקציה המקורית, ונקבל:

$$y = 3x^3 - 9x^2 + 10$$

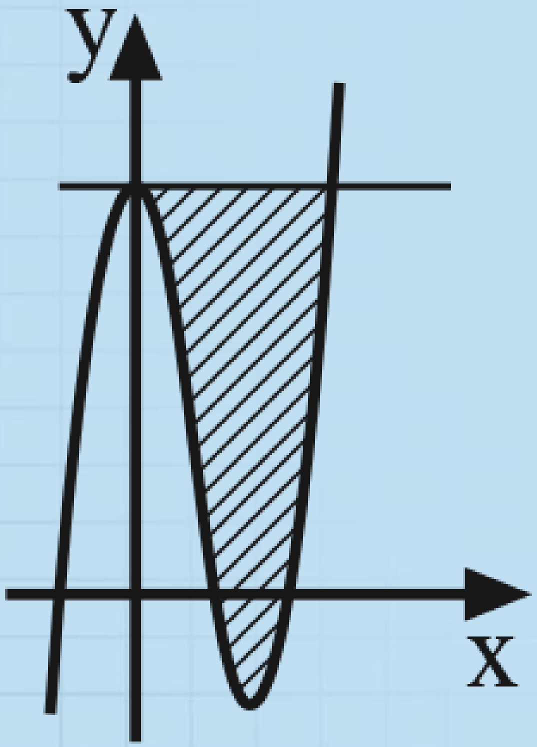
נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.

משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$.

ג. מצא את השטח המוגבל ע״י הישר $y = 10$ וע״י גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

פתרון

<u>סעיף ג׳:</u>

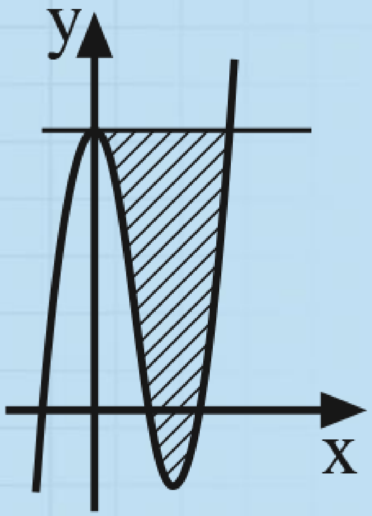


יש למצוא את הגבול הימני של השטח. לכן יש למצוא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 10$.

$$y = 3x^3 - 9x^2 + 10$$

$$10 = 3x^3 - 9x^2 + 10$$

נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.
משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$.
ג. מצא את השטח המוגבל ע״י הישר $y = 10$ וע״י גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



פתרון

$$3x^3 - 9x^2 = 0$$

$$3x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 3$$

$$S = \int_0^3 [10 - (3x^3 - 9x^2 + 10)dx] = \int_0^3 (-3x^3 + 9x^2)\,dx =$$

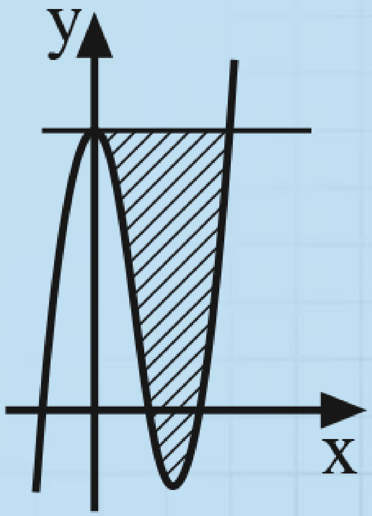
נתונה הפונקציה: $y = ax^3+bx^2+c$. לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(2,-2)$ ויש לה גם נקודת מקסימום.

משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום היא $y = 10$.

ג. מצא את השטח המוגבל ע״י הישר $y = 10$ וע״י גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

פתרון

$$\int_0^3(-3x^3+9x^2)=\left[-3\cdot\frac{x^4}{4}+9\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\left[\frac{-3x^4}{4}+3x^3\right]_0^3=$$



$$\left(\frac{-3\cdot 3^4}{4}+3\cdot 3^3\right)-0=\boxed{20\frac{1}{4}}$$

בהצלחה