פתרון תרגיל

חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי–תרגילים לחזרה
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 330, ת. 32

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

32) נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

א. הישר $y = -x+b$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. דרך נקודת המינימום המוחלט ודרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה העבירו מקבילים לציר ה-y. מצא את המרחק בין שני המקבילים.

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

א. הישר $y = -x+b$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = ax - \sqrt{8 - x^2}$$

נקודת ההשקה היא: $(0, -\sqrt{8})$.

כדי למצוא את a ואת b, נבטא את משוואת המשיק בעזרת a.

נמצא את שיפוע המשיק על-פי ערך הנגזרת בנקודת ההשקה.

$$f'(x) = a - \frac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר. א. הישר $y = -x+b$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

פתרון

$$f'(x) = a + \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$f'(0) = a$$

$$\boldsymbol{m = a} \qquad\qquad \boldsymbol{(0, -\sqrt{8})}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \left(-\sqrt{8}\right) = a(x - 0)$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.
א. הישר $y = -x+b$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

פתרון

$$y + \sqrt{8} = ax$$

$$y = ax - \sqrt{8}$$

נתון כי משוואת המשיק היא: $y = -x + b$

לכן:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -\sqrt{8} \end{aligned}}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

נציב בפונקציה $a = -1$, ונקבל: $f(x) = -x - \sqrt{8 - x^2}$

ב. **תחום ההגדרה של הפונקציה:** $8 - x^2 \geq 0$

זהו אי שוויון ריבועי. נפתור אותו על-ידי שרטוט.

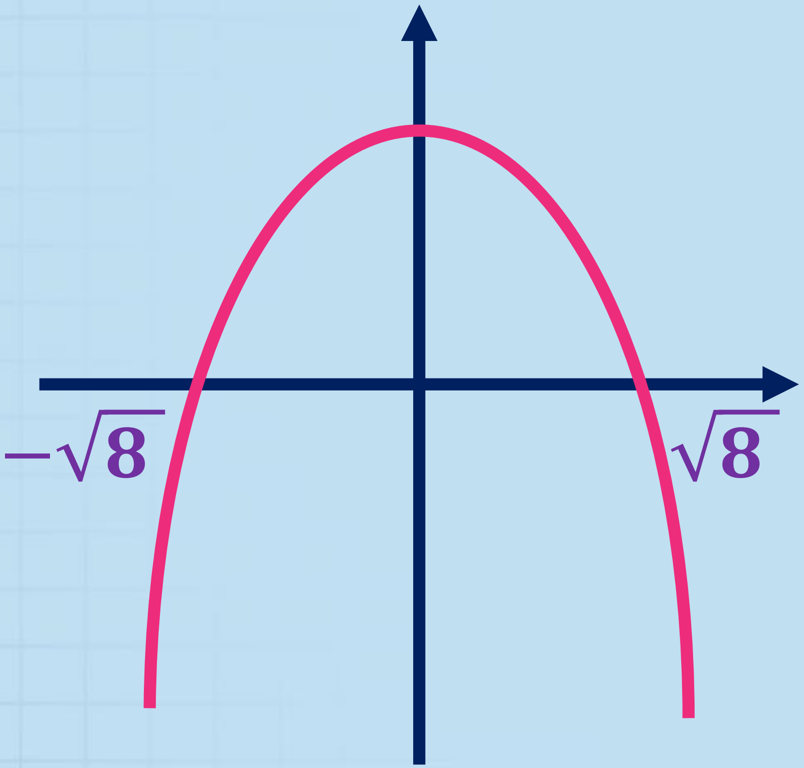
הפרבולה שנמצאת באגף שמאל היא **הפוכה** (כי $a = -1$).

כדי למצוא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x, נפתור את המשוואה הבאה:

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$,
a הוא פרמטר.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון



$$8 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = -\sqrt{8},\ \sqrt{8}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

הצג את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

פתרון

לכן פתרון המשוואה הוא: $\boxed{-\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8}}$

וזהו תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כדי לפתור את המשוואה $f'(x) = 0$, **נציב** $a = -1$ **בנגזרת.**

$$f'(x) = a + \frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים :

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

פתרון

$$f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$-1 + \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{8-x^2}} = 1$$

$$x = \sqrt{8-x^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

a הוא פרמטר.

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

פתרון

$$x^2 = 8 - x^2$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \qquad x = -2$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

פתרון

נבדוק שהפתרונות שמצאנו אכן מקיימים את המשוואה $\boldsymbol{-1 + \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} = 0}$

$$x = 2 \rightarrow -1 + \frac{2}{\sqrt{8-2^2}} = 0$$

$$-1 + \frac{2}{2} = 0$$

$\boldsymbol{0 = 0}$ ← x=2 פותר את המשוואה

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.
הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ג. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$ ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.

פתרון

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad -1 + \frac{-2}{\sqrt{8-(-2)^2}} = 0$$

$$-1 - \frac{2}{2} = 0$$

$$-2 = 0$$

קיבלנו **פסוק שקר**, ולכן $x = -2$ **לא** פותר את המשוואה.

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:
a הוא פרמטר.
ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

ד. כדי למצוא את נקודות הקיצון המוחלטות, **יש לרכז את הנקודות החשודות כנקודות הקיצון הפנימיות ואת נקודות הקצה.**

הנקודה שחשודה כנקודת קיצון פנימית היא: $x = 2$. נשים לב שנקודה זאת **שייכת לתחום ההגדרה** של הפונקציה, שהוא: $-\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8}$.

שיעורי ה-x של הנקודות בקצוות הם: $x = -\sqrt{8}$ **ו-** $x = \sqrt{8}$.

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

נמצא את שיעורי ה-y של שלוש הנקודות שקיבלנו.

$$f(x) = -x - \sqrt{8 - x^2}$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = -2 - \sqrt{8 - 2^2} = -2 - 2 = -4$$

$$x = -\sqrt{8} \rightarrow f\left(-\sqrt{8}\right) = \sqrt{8} - \sqrt{8 - 8} = \sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{8} \rightarrow f\left(\sqrt{8}\right) = -\sqrt{8} - \sqrt{8 - 8} = -\sqrt{8}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:
a הוא פרמטר. ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

שלוש הנקודות המועמדות לנקודות קיצון מוחלטות הן:

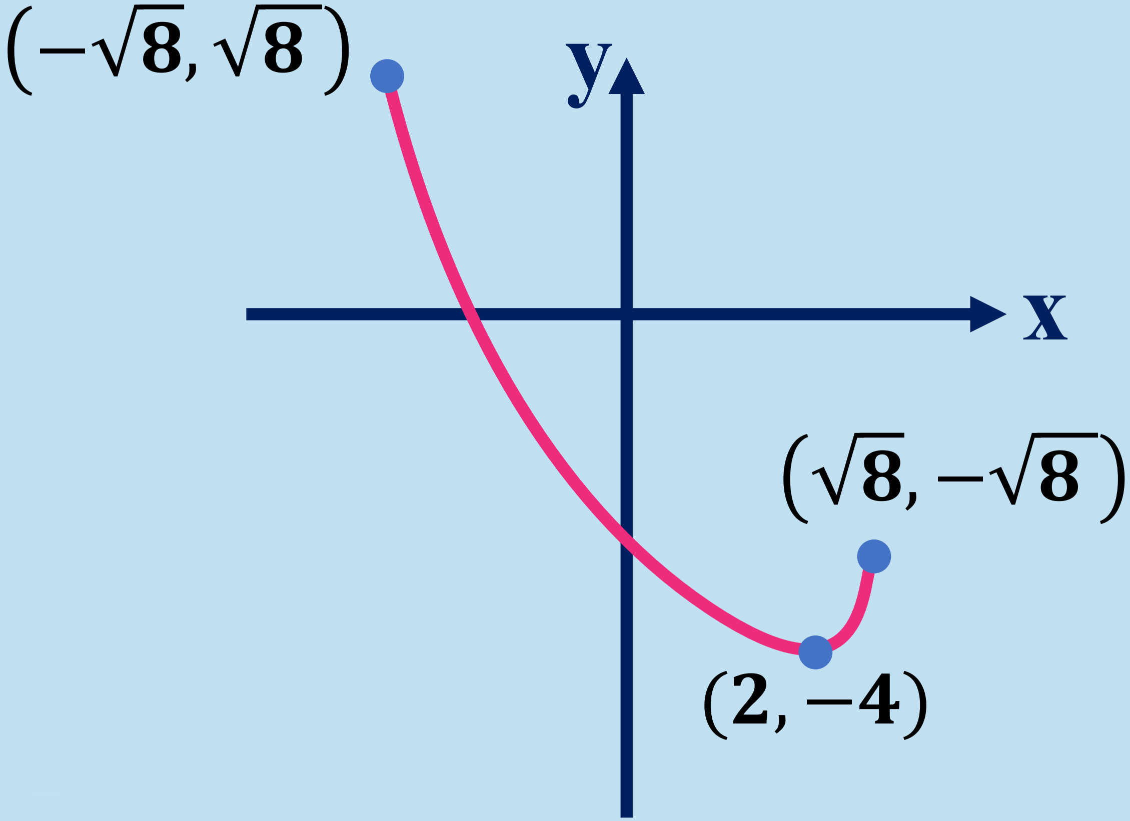
$(2, -4)$ ← **מינימום מוחלט**

$(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$ ← **מקסימום מוחלט**

$(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$,   הצב את הערך של a שמצאת בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:
a הוא פרמטר.   ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

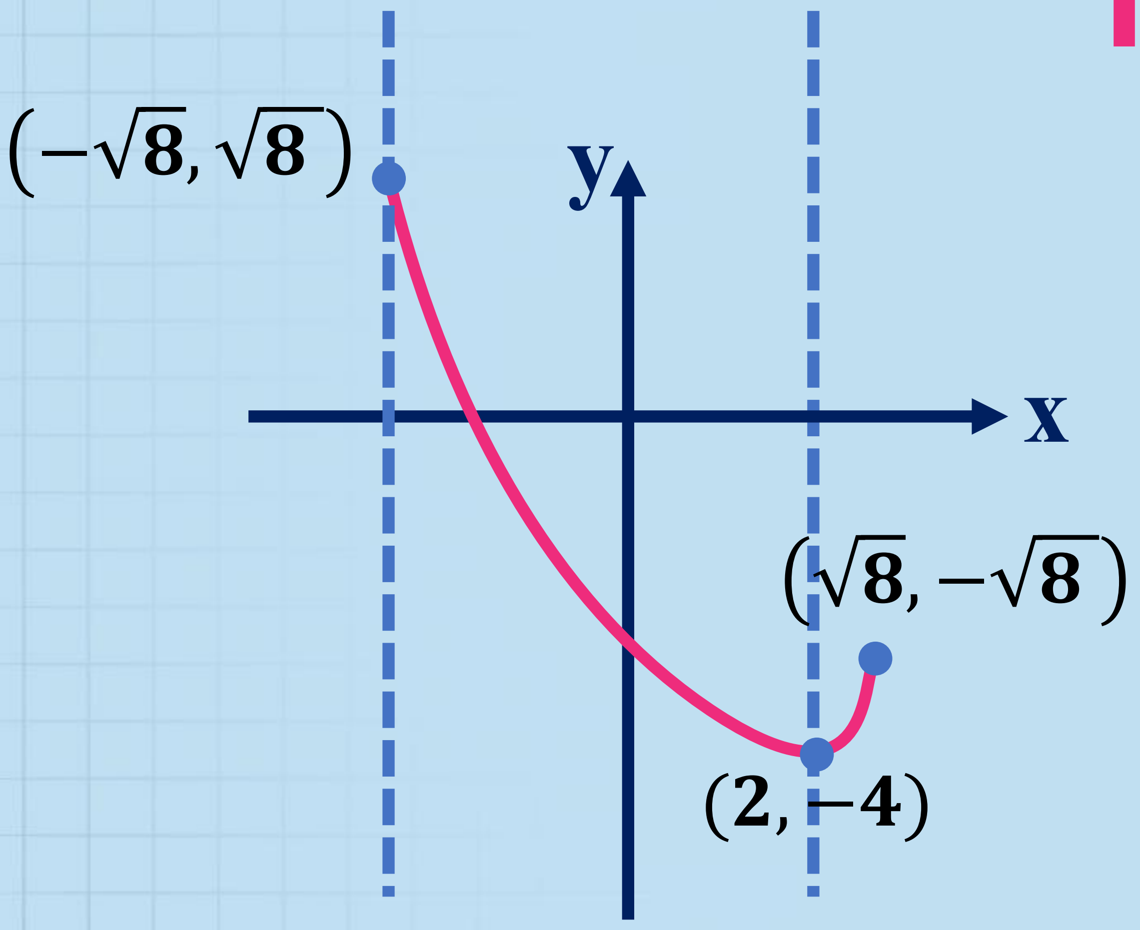


$$y = -x - \sqrt{8 - x^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{8-x^2}$, a הוא פרמטר.

ו. דרך נקודת המינימום המוחלט ודרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה העבירו מקבילים לציר ה-y. מצא את המרחק בין שני המקבילים.

פתרון



ו. יש למצוא את המרחק בין שני קווים ישרים שמקבילים לציר ה-y.

המרחק בין שני ישרים שמקבילים לציר ה-y הוא **ההפרש** בין שיעורי ה-x שלהם.

לכן, המרחק הוא: $2 - (-\sqrt{8})$

כלומר, $\boxed{2 + \sqrt{8}}$

בהצלחה