פתרון תרגיל

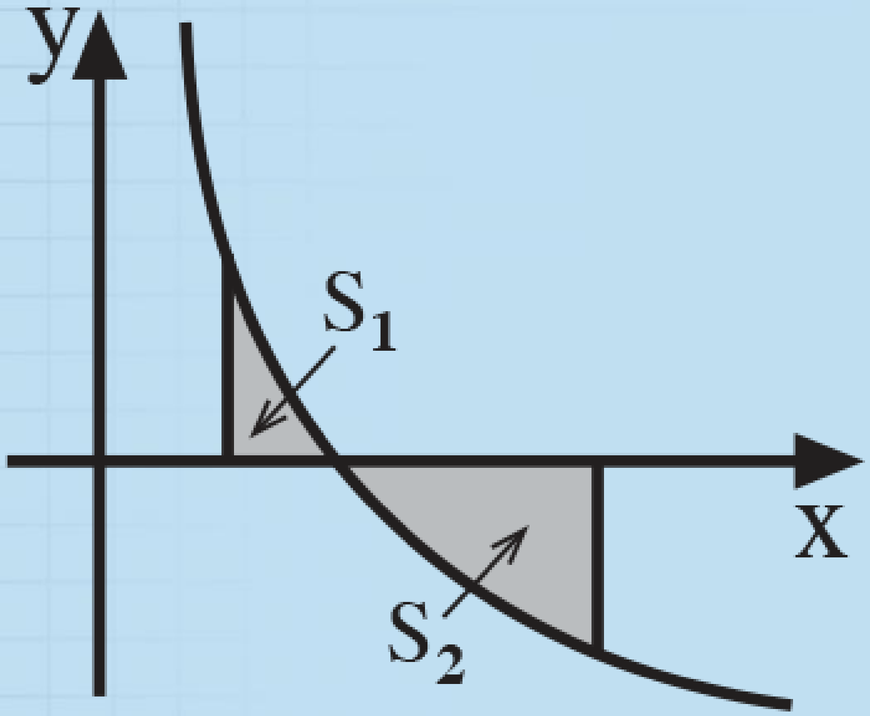
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי–תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 328, ת. 22

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה



22) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ בתחום $x > 0$.

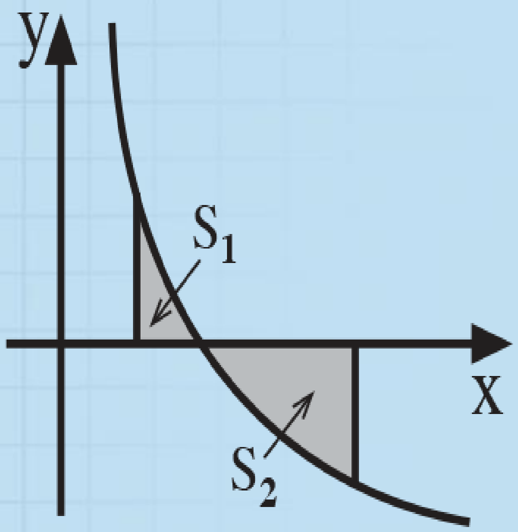
S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר $x = \frac{1}{2}$ וציר ה-x. S_2 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר $x = k$ $(k > 1)$ וציר ה-x.

א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1 = S_2$.

ב. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם גרף הפונקציה וב-B את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה. מצא את אורך הקטע AB עבור ה-k שמצאת בסעיף א'.

22) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1 = S_2$.

פתרון



<u>סעיף א':</u>

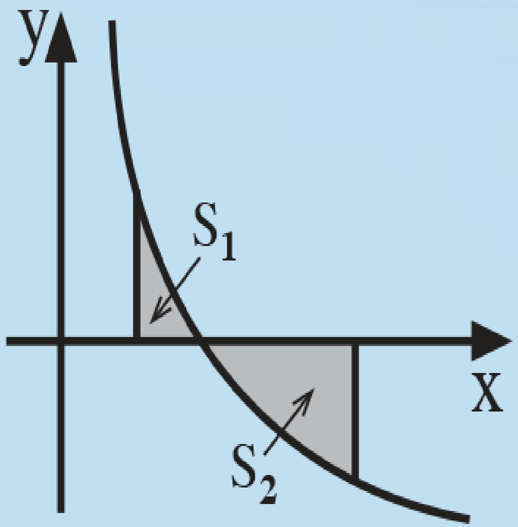
כדי למצוא את השטח S_1, יש למצוא את הגבול הימני של השטח.

כלומר, את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = 0$$

22) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$.א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1 = S_2$.

פתרון



$$\frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 1$$

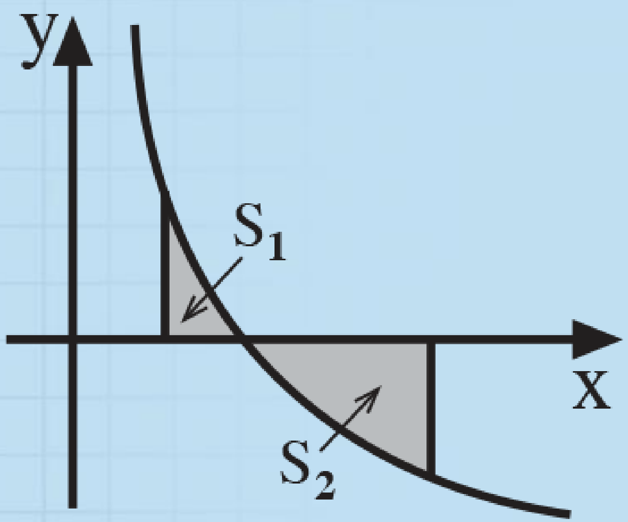
$x = 1$ $\quad$ $\cancel{x = -1}$ **לא בתחום**

$$S_1 = \int_{0.5}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - x\right]_{0.5}^{1} = \left(-\frac{1}{1} - 1\right) - \left(-\frac{1}{0.5} - 0.5\right)$$

$$= -2 - (-2.5) = 0.5$$

22) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}-1$ א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1=S_2$.

פתרון



נשים לב לכך שהשטח S_2 **נמצא מתחת לציר ה-x**, ולכן:

$$S_2=\int_1^k\left(0-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\right)\mathrm{dx}=\int_1^k\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)\mathrm{dx}=$$

$$\left[\frac{1}{x}+x\right]_1^k=\left(\frac{1}{k}+k\right)-\left(\frac{1}{1}+1\right)=\frac{1}{k}+k-2$$

22) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}-1$ א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1=S_2$.

פתרון

יש למצוא את הערך של k שעבורו מתקיים: $S_1=S_2$

לכן: $\frac{1}{k}+k-2=0.5$

$$\frac{1}{k}+k=2.5$$

$$2+2k^2=5k$$

$$2k^2-5k+2=0$$

22) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ א. מצא את הערך של k עבורו מתקיים $S_1 = S_2$.

פתרון

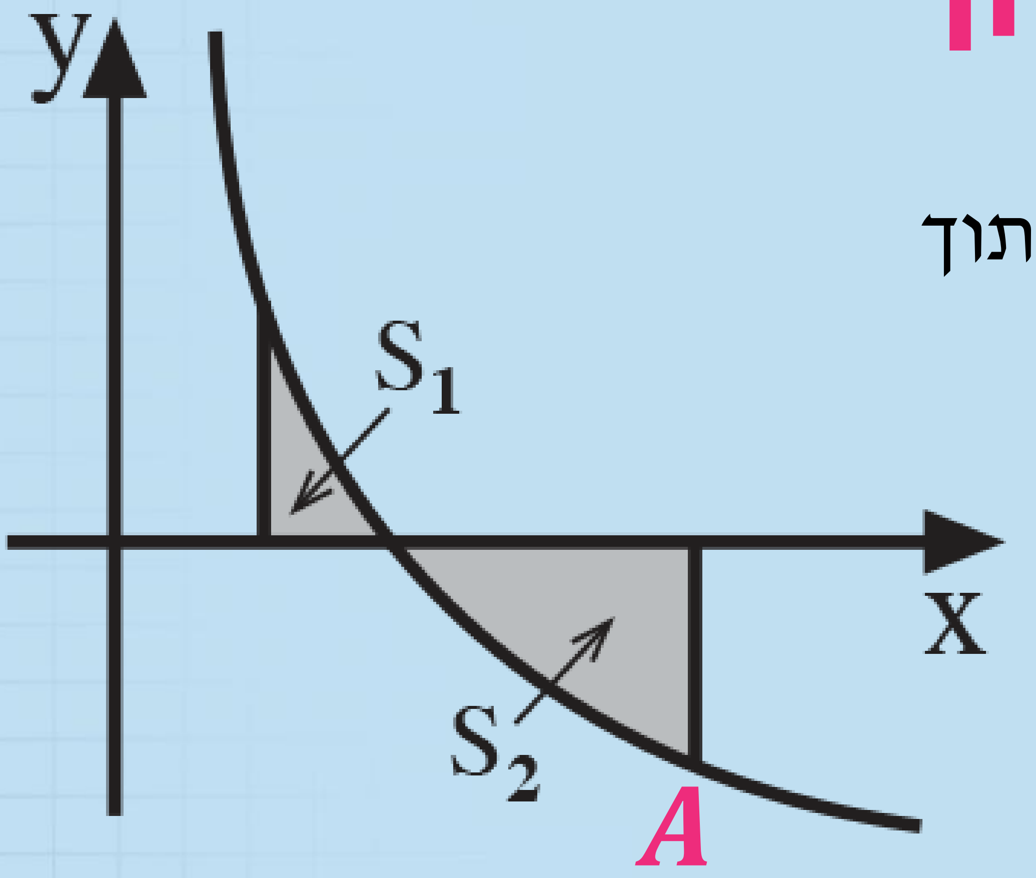
נקבל שני פתרונות: $\cancel{k_1 = 0.5}$ $k_2 = 2$

נתון: $k > 1$

לכן: $\boxed{k = 2}$

ב. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם גרף הפונקציה וב-B את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה. מצא את אורך הקטע AB עבור ה-k שמצאת בסעיף א'.

פתרון

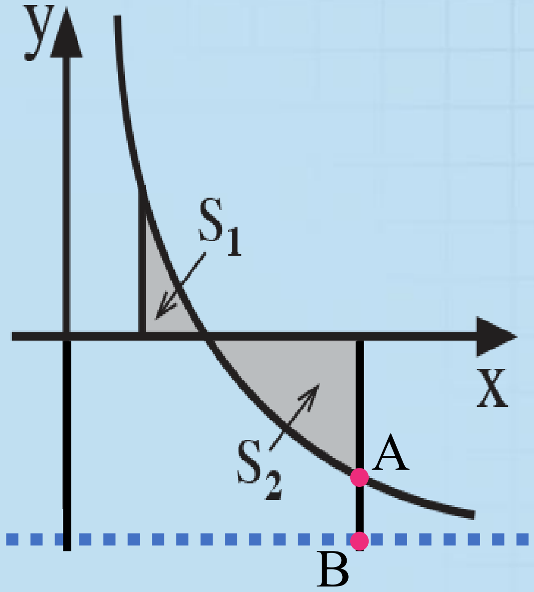


סעיף ב':

נמצא את הנקודה A, שהיא נקודת החיתוך בין הישר $x = 2$ לבין הפונקציה.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

ב. נסמן ב- A את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם גרף הפונקציה וב- B את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה. מצא את אורך הקטע AB עבור ה- k שמצאת בסעיף א'.



פתרון

$$f(2) = \frac{1}{2^2} - 1 = -\frac{3}{4}$$

לכן: $A\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

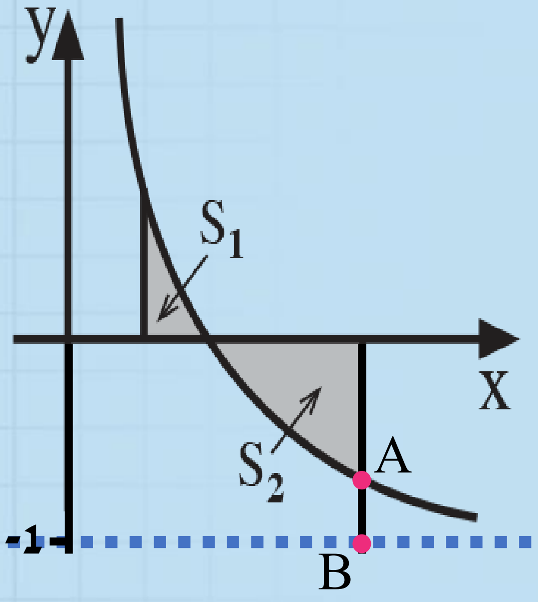
כדי למצוא את הנקודה B, יש למצוא את **האסימפטוטה האופקית** של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 1 \longrightarrow f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$$

עושים מכנה משותף

ב. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם גרף הפונקציה וב-B את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה. מצא את אורך הקטע AB עבור ה-k שמצאת בסעיף א'.

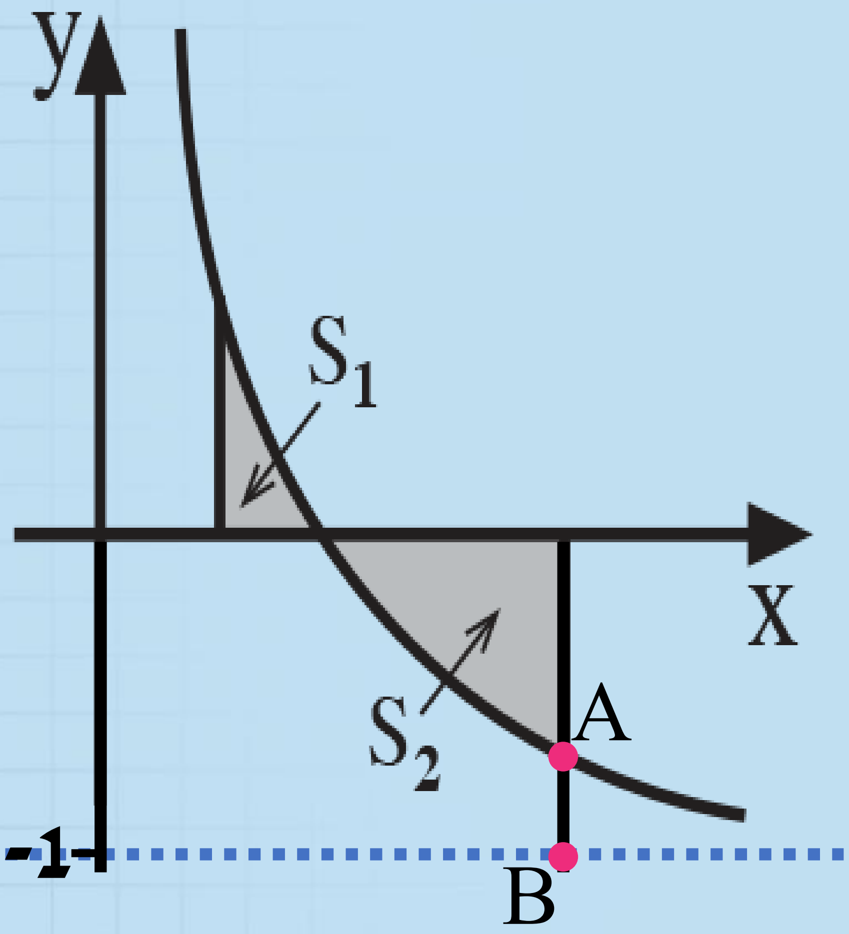
פתרון



החזקה הגבוהה ביותר במונה היא $-x^2$, והחזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2. לכן **האסימפטוטה האופקית היא:** $\boldsymbol{y = \frac{-1}{1} = -1}$

הנקודה B היא נקודת החיתוך של הישר $x = 2$ והישר $y = -1$. לכן: $\boldsymbol{B(2, -1)}$

ב. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם גרף הפונקציה וב-B את נקודת החיתוך של הישר $x = k$ עם האסימפטוטה האופקית של הפונקציה. מצא את אורך הקטע AB עבור ה-k שמצאת בסעיף א'.



פתרון

$$A\left(2,-\frac{3}{4}\right) \qquad B(2,-1)$$

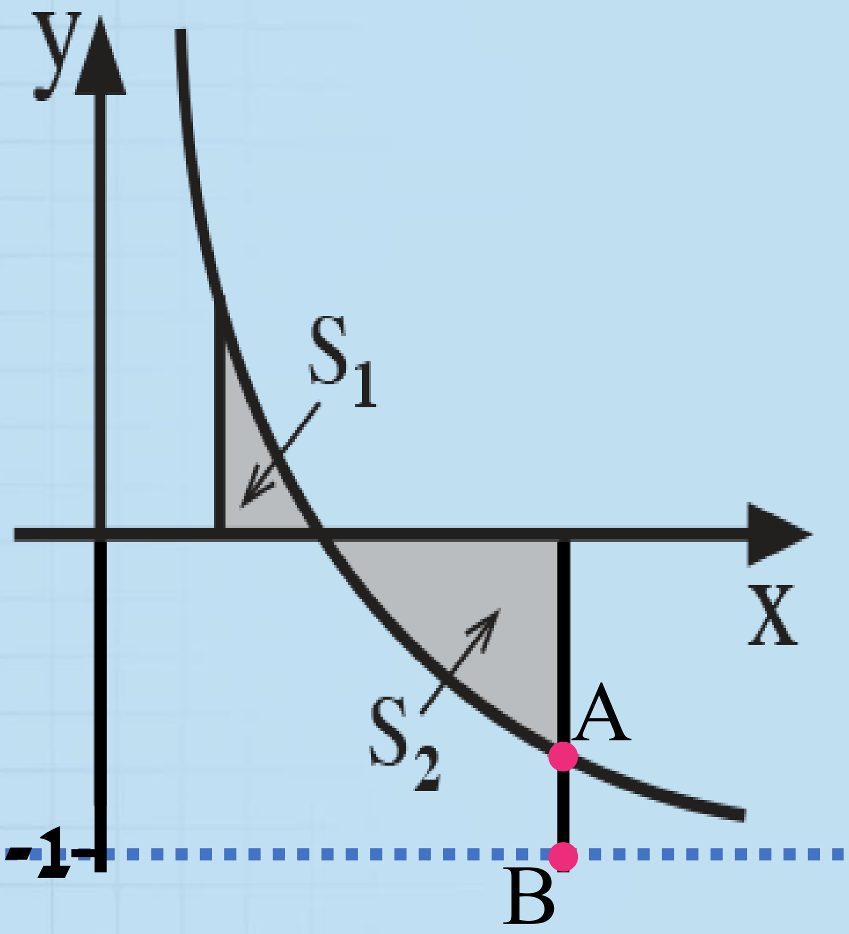
$$d_{AB} = y_A - y_B$$

$$d_{AB} = -\frac{3}{4} - (-1)$$

$$\boxed{d_{AB} = \frac{1}{4}}$$

22) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ ב. מצא את אורך הקטע AB עבור ה-k שמצאת בסעיף א'.

פתרון



$$A\left(2, -\frac{3}{4}\right) \qquad B(2, -1)$$

$$d_{AB} = y_A - y_B$$

$$d_{AB} = -\frac{3}{4} - (-1)$$

$$\boxed{d_{AB} = \frac{1}{4}}$$

בהצלחה