פתרון תרגיל

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי–תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 326, ת. 11

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

11) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x = 1$. מצא את k.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx+7}{x^2-x+2}$.   א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

א) **תחום הגדרה:**

נשווה את המכנה של הפונקציה לאפס, ונקבל: $x^2-x+2=0$

נפתור בעזרת נוסחת השורשים, ונקבל מספר **שלילי** מתחת לשורש.

לכן **אין פתרון** למשוואה הנ"ל.

לכן המכנה **לעולם לא מתאפס**, ותחום ההגדרה הוא: $\boxed{\textbf{כל } x}$.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ב. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x=1$. מצא את k.

פתרון

ב) **נתון כי:** $f'(1)=0$.

$$f(x)=\frac{kx+7}{x^2-x+2}$$

$$f'(x)=\frac{k(x^2-x+2)-(kx+7)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ב. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x = 1$. מצא את k.

פתרון

$$f'(x) = \frac{k(x^2 - x + 2) - (kx + 7)(2x - 1)}{(x^2 - x + 2)^2}$$

$$0 = \frac{k(1 - 1 + 2) - (k + 7)(2 - 1)}{(1 - 1 + 2)^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ב. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $x = 1$. מצא את k.

פתרון

$$2k - k - 7 = 0$$

$$k - 7 = 0$$

$$k = 7$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

ג) **<u>נקודות הקיצון וסוגן:</u>**

$$f'(x) = \frac{k(x^2-x+2)-(kx+7)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7(x^2-x+2)-(7x+7)(2x-1)}{(\quad)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^2-7x+14-(14x^2-7x+14x-7)}{(\quad)^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$f'(x) = \frac{7x^2 - 7x + 14 - 14x^2 - 7x + 7}{(\quad)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7x^2 - 14x + 21}{(\quad)^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

הנגזרת מתאפסת כאשר:

$$-7x^2 - 14x + 21 = 0$$

מקבלים שני פתרונות:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

כדי לקבוע את סוג הקיצון, **מספיק לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה**.

המונה של הנגזרת $= -7x^2 - 14x + 21$

נגזרת המונה $= -14x - 14$

כשמציבים $x = 1$ בנגזרת המונה, מקבלים: $0 > -28 = -14 - 14$,

ולכן $x = 1$ הוא **מקסימום**.

כשמציבים $x = -3$ בנגזרת המונה, מקבלים: $0 < 28 = -14 \cdot (-3) - 14$

ולכן $x = -3$ הוא **מינימום**.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

נותר למצוא את שיעורי ה-y של נקודות הקיצון על-ידי הצבה בפונקציה המקורית, לאחר שמציבים בה $k = 7$.

$$f(x) = \frac{7x+7}{x^2-x+2}$$

$$f(1) = \frac{7+7}{1-1+2} = 7 \qquad f(-3) = \frac{7\cdot(-3)+7}{(-3)^2-(-3)+2} = -1$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

לסיכום:

$(1,7)$ מקסימום

$(-3,-1)$ מינימום

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

ד) נקודות חיתוך עם הצירים:

$$f(x) = \frac{7x+7}{x^2-x+2}$$

חיתוך עם ציר ה-y:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{7}{2}$$

חיתוך עם ציר ה-x:

$$7x + 7 = 0$$

$$x = -1$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

פתרון

נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הן: $\boxed{(0,\ 3.5)\quad(-1,0)}$

ה) **<u>אסימפטוטות מאונכות לצירים</u>**:

<u>אסימפטוטות מקבילות לציר ה-y</u>: כיוון שהפונקציה מוגדרת לכל x (המכנה לעולם לא מתאפס), **אין** אסימפטוטות המקבילות לציר ה-y.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

פתרון

<u>אסימפטוטות המקבילות לציר ה-x:</u>

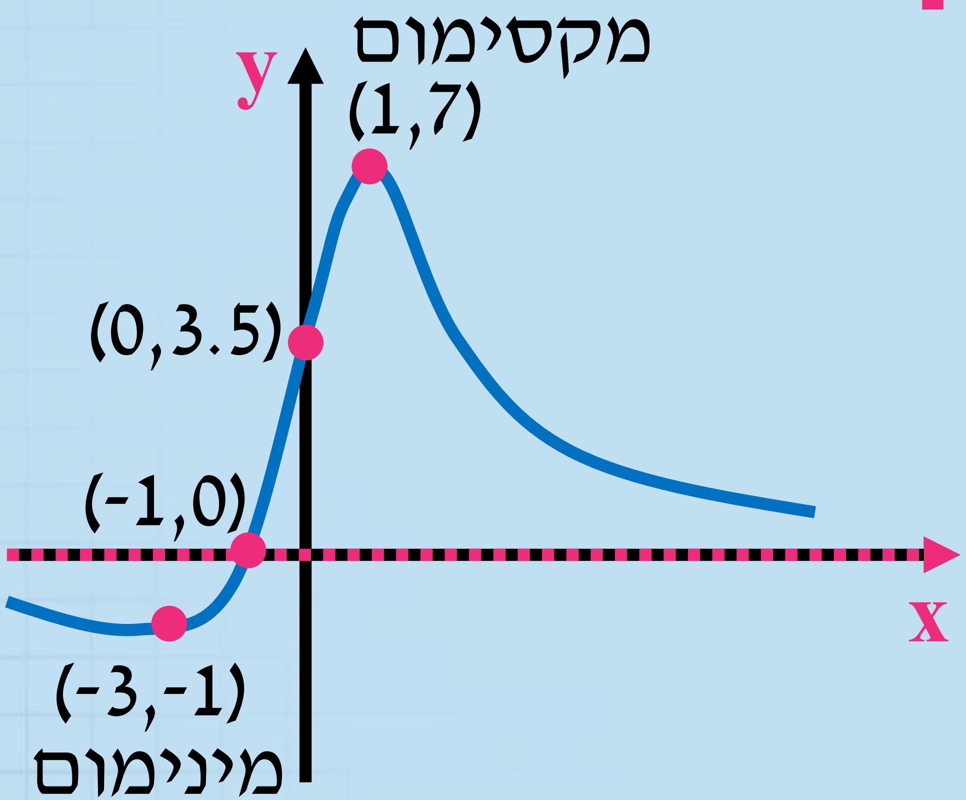
מעריך החזקה הגבוהה ביותר במונה הוא 1, ומעריך החזקה הגבוהה ביותר במכנה הוא 2.

לכן האסימפטוטה היא: $\boxed{y=0}$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx+7}{x^2-x+2}$.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון



$$f(x) = \frac{7x+7}{x^2-x+2}$$

בהצלחה