פתרון תרגיל

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי–תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 325, ת. 6

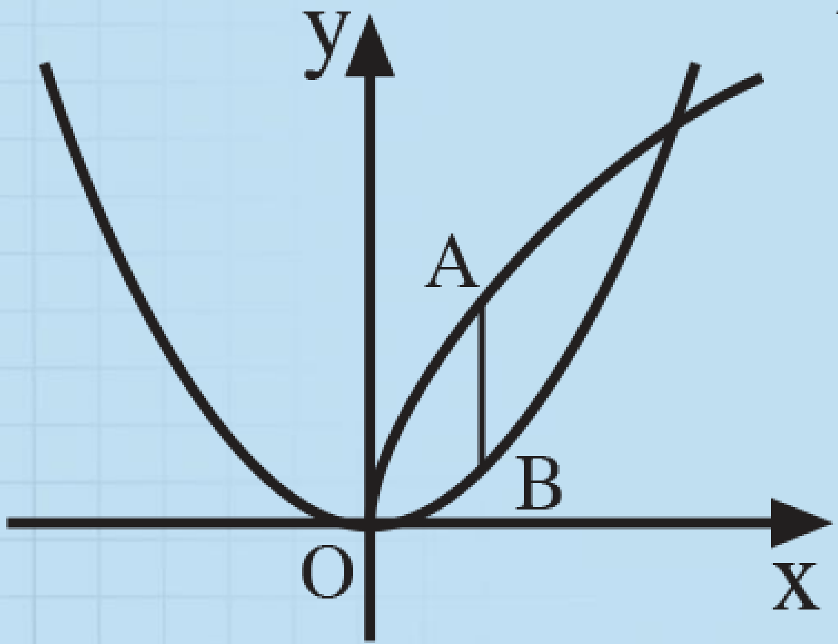
המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

6) נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, $g(x) = \sqrt{2x}$.
הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות
כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y והנקודות נמצאות
בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות.

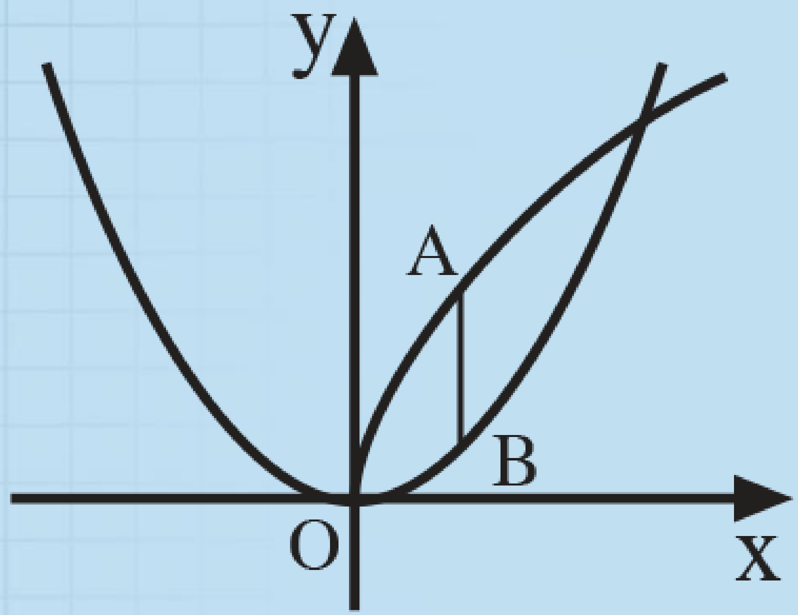
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB, חשב את שטח המשולש ABO (O — ראשית הצירים).



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון



סעיף א':

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ היא פרבולה ישרה, לכן

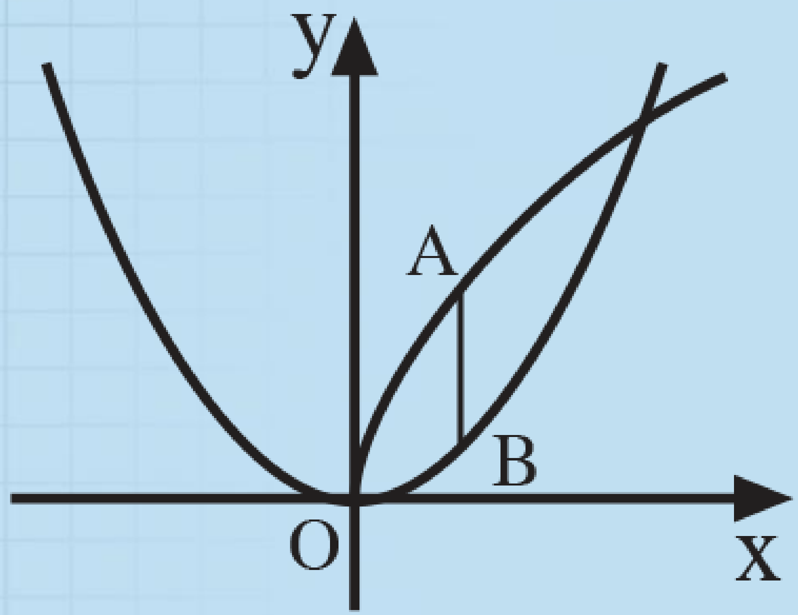
היא מתאימה לגרף ש-B נמצאת עליו.

מסקנה: $g(x) = \sqrt{2x}$ מתאימה לגרף ש-A

נמצאת עליו.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון



נסמן את שיעור ה-x של הנקודה B ב-x.

הנקודה B נמצאת על הפרבולה, ולכן הנקודה B היא:

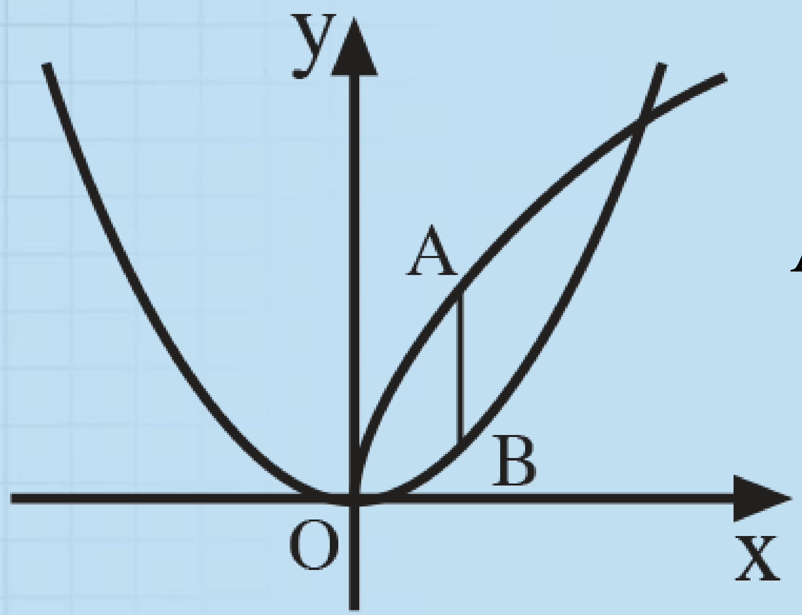
$B\left(\boldsymbol{x},\frac{1}{8}x^2\right)$.

נתון שהקטע AB **מקביל לציר ה-y**, ולכן **שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B שווים**.

לכן הנקודה A היא: $\left(\boldsymbol{x},\sqrt{2x}\right)$

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון



כיוון שהקטע AB **מקביל** לציר ה-y, האורך של AB

שווה **להפרש** בין שיעורי ה-y של שתי הנקודות.

לכן, הפונקציה שעלינו למצוא את נקודת המקסימום שלה היא:

$$h(x)=\sqrt{2x}-\frac{1}{8}x^2$$

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון

כדי למצוא את נקודת המקסימום, נגזור את הפונקציה ונשווה אותה לאפס.

$$h(x) = \sqrt{2x} - \frac{1}{8}x^2$$

$$h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{8} \cdot 2x$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{x}{4}$$

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{x}{4} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{x}{4}$$

$$x \cdot \sqrt{2x} = 4$$

$$x^2 \cdot 2x = 16$$

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

מצאנו את שיעור ה-x של הנקודה החשודה כקיצון. נראה שמדובר בנקודת מקסימום.

נציב ב- $h'(x)$ שני ערכים, **משני הצדדים** של $x = 2$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{x}{4}$$

$$h'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \cong 0.457 > 0$$

$$h'(3) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{4} \cong -0.34 < 0$$

קיבלנו שמשמאל ל-x=2 הפונקציה $h(x)$ **עולה**, ומימין ל- $x = 2$ היא **יורדת**.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

פתרון

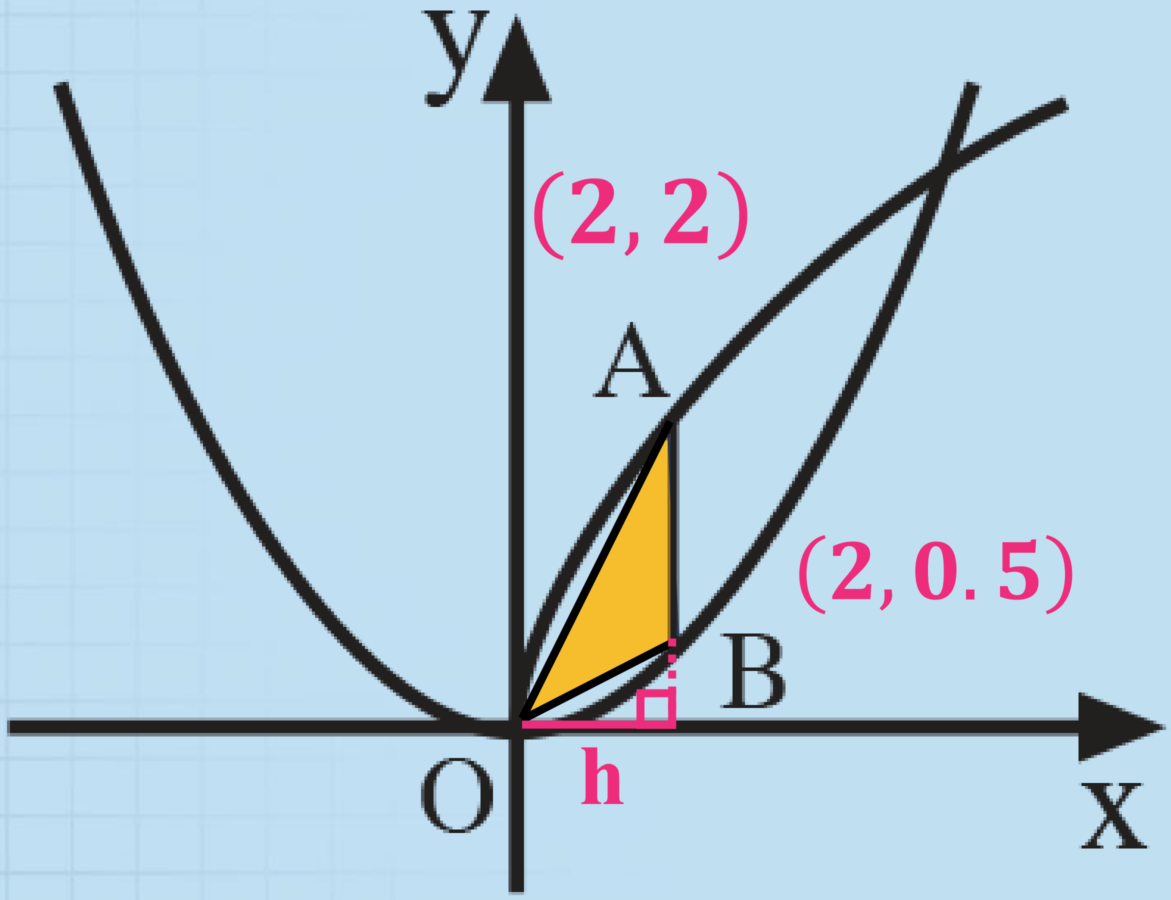
מסקנה: כאשר $x = 2$, האורך של הקטע AB הוא **מקסימלי**.

ראינו שהנקודות A ו-B הן: $A(x,\sqrt{2x})$ $B\left(x,\frac{1}{8}x^2\right)$

נציב $x = 2$ ונקבל: $\boxed{A(2, 2)\text{ ו- } B\left(2,\frac{1}{2}\right)}$

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB, חשב את שטח המשולש ABO (O – ראשית הצירים).

פתרון



<u>סעיף ב':</u>

$$S_{\Delta ABO}=\frac{d_{AB}\cdot h}{2}$$

$$S_{\Delta ABO}=\frac{(2-0.5)\cdot 2}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABO}=1.5}$$

בהצלחה