פתרון תרגיל

שטחים – פולינומים ופונקציות רציונאליות – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 319, ת. 17

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

17) בנקודה (a, a^2) שעל גרף הפונקציה $y = x^2$ $(a \neq 0)$ העבירו משיק.

א. הראה שהמשיק חותך את ציר ה- x בנקודה $(\frac{a}{2}, 0)$.

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה- x בנקודה $(3, 0)$.

חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x.

א. הראה שהמשיק חותך את ציר ה-x בנקודה $(\frac{a}{2}, 0)$.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

נתון שנקודת ההשקה היא: (a, a^2)

נמצא את שיפוע המשיק על-פי ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = a$.

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y'(a) = 2a$$

א. הראה שהמשיק חותך את ציר ה-x בנקודה $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

פתרון

נמצא את משוואת המשיק.

$$(a\,, a^2) \qquad\qquad m = 2a$$

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$y - a^2 = 2ax - 2a^2$$

$$y = 2ax - a^2$$

א. הראה שהמשיק חותך את ציר ה-x בנקודה $(\frac{a}{2},0)$.

פתרון

$$y = 2ax - a^2$$

נראה שהנקודה $\left(\frac{a}{2},0\right)$ נמצאת על המשיק על-ידי **הצבת** הנקודה במשוואת המשיק.

$$\left(\frac{a}{2},0\right) \rightarrow 0 = 2a \cdot \frac{a}{2} - a^2$$

$$0 = a^2 - a^2$$

$$0 = 0$$ ← **פסוק אמת**

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

סעיף ב':

בסעיף א' מצאנו שמשוואת המשיק לפונקציה $y = x^2$ בנקודה כלשהי היא:

$$y = 2ax - a^2$$

הוכחנו גם כי המשיק חותך את הציר ה-x בנקודה $\left(\frac{a}{2},0\right)$

כעת נתון כי נקודת החיתוך של משיק כלשהו עם ציר ה-x היא: $(3,0)$

משתי השורות האחרונות נובע כי: $\frac{a}{2} = 3$

$$a = 6$$

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

נציב $a = 6$ במשוואת המשיק שקיבלנו בסעיף א'.

$$a = 6 \rightarrow y = 2ax - a^2$$

$$y = 12x - 36$$

כך קיבלנו את משוואת המשיק שלנו.

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

כדי להבין באיזה שטח מדובר, נשרטט סקיצה של הפונקציה ושל המשיק לפונקציה בנקודה $(6,36)$:

ידוע שנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x היא: $(3,0)$.

רואים שהשטח שלפנינו הוא **שטח מורכב**. נסמן אותו ב-S.

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

עד לנקודה שבה $x=3$, השטח נמצא מתחת לפונקציה $(S_1)\ y=x^2$

בין $x=3$ ל-$x=6$, השטח נמצא בין הפרבולה לבין המשיק (S_2) .

$$S_1=\int_0^3 (x^2)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\left(\frac{3^3}{3}\right)-(0)=9$$

$$S_2=\int_3^6 [x^2-(12x-36)dx]=\int_3^6 (x^2-12x+36)dx$$

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

$$\int_3^6 (x^2 - 12x + 36)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 36x\right]_3^6$$

$$= \left(\frac{6^3}{3} - 6 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 6 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3\right)$$

$$= (72) - (63)$$

$$S_2 = 9$$

ב. משיק לגרף הפונקציה הנ"ל חותך את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$.
חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-x.

פתרון

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = 9 + 9$$

$$\boldsymbol{S = 18}$$

בהצלחה