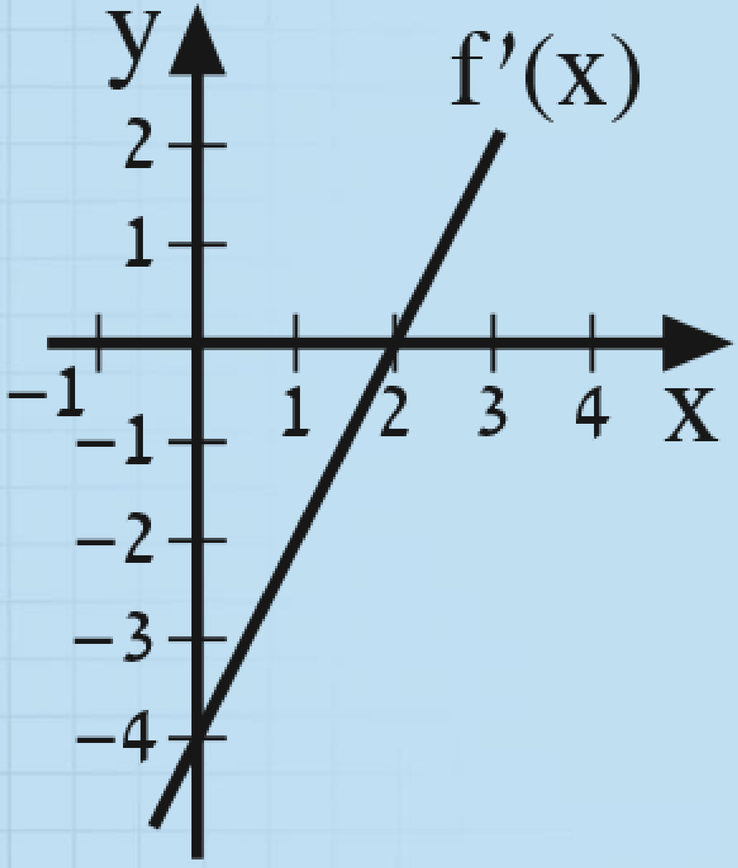
פתרון תרגיל

אינטגרלים ושטחים–
תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

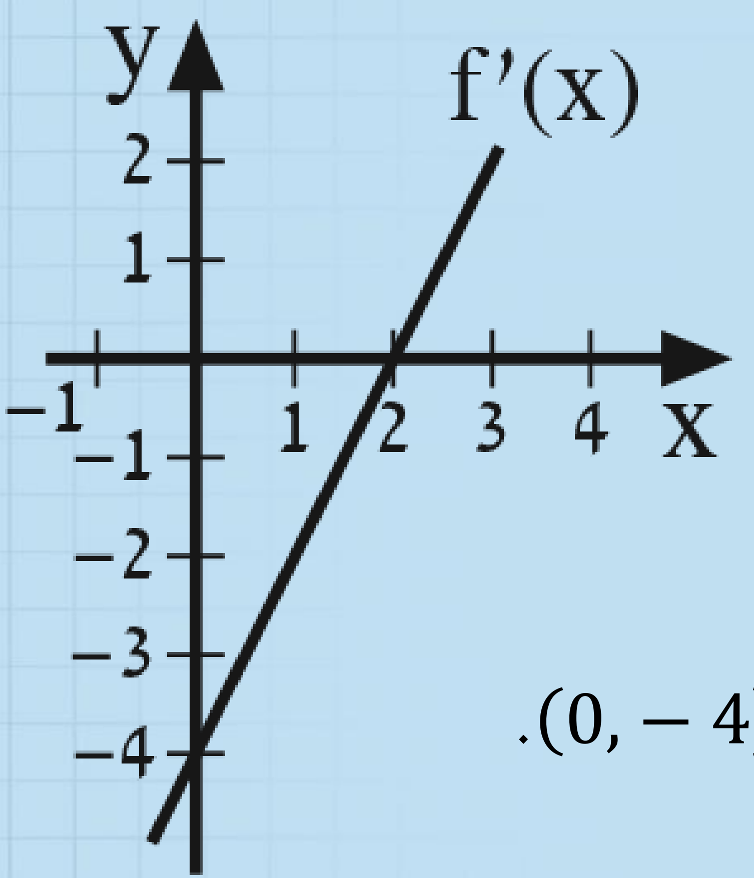
481 , עמ' 317, ת. 3

השאלה



3) בציור מתוארת הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
הנגזרת היא קו ישר. נתון: $f(3) = -2$.
א. היעזר בציור ומצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח שמוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

א. היעזר בציור ומצא את הפונקציה f(x).



פתרון

<u>סעיף א':</u>

ראשית, נמצא את המשוואה של $f'(x)$.

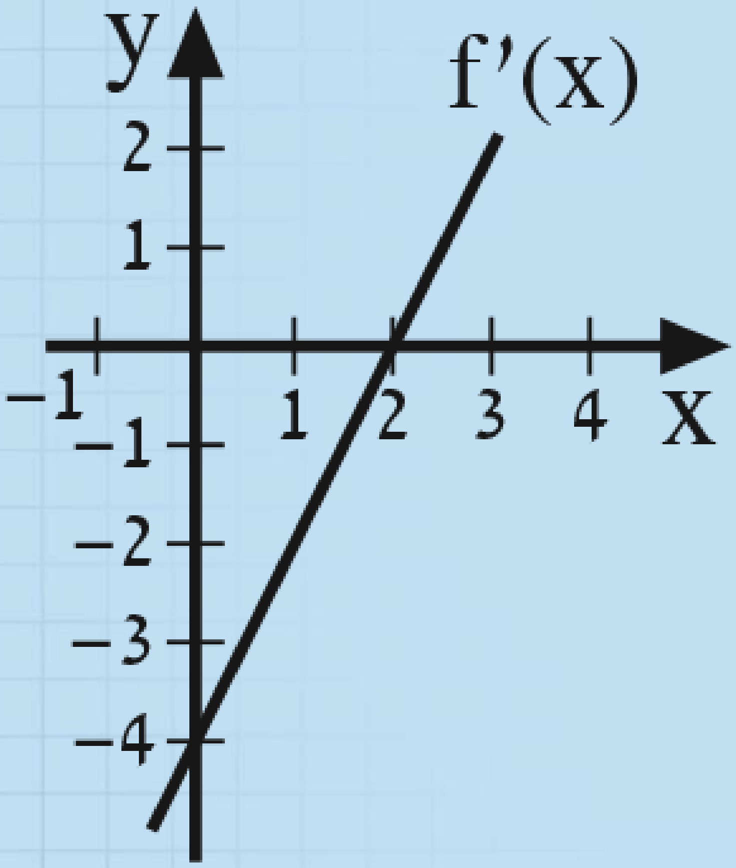
זהו קו ישר, ולכן אפשר למצוא את המשוואה שלו על-פי **שתי נקודות** שנמצאות עליו.

נשתמש בשתי הנקודות הבאות שנמצאות על הישר: $(2,0)$ ו-$(0,-4)$.

שיפוע הישר הוא: $m=\frac{0-(-4)}{2-0}$

א. היעזר בציור ומצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון



$$m = \frac{4}{2}$$

$$m = 2$$

כעת נמצא את משוואת הישר על-פי השיפוע ואחת מהנקודות.

$$m = 2 \quad (2,0)$$

$$y - 0 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 4$$

א. היעזר בציור ומצא את הפונקציה $f(x)$.

פתרון

$$f(x) = \int (2x - 4)\,\mathrm{dx} = x^2 - 4x + C$$

נתון כי: $f(3) = -2$. לכן נציב את הנקודה הזאת במשוואת הפונקציה כדי למצוא את C.

$$-2 = 3^2 - 4 \cdot 3 + C$$

$$-2 = 9 - 12 + C$$

$$C = 1$$

לכן: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 1}$

ב. חשב את השטח שמוגבל בין גרף הפונקציה f(x) לבין הגרף של הפונקציה הנגזרת f'(x).

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

יש למצוא את השטח הכלוא בין $f'(x)$ לבין $f(x)$.

ראשית, נמצא את **הגבולות** של השטח על-ידי מציאת **נקודות החיתוך** בין שתי הפונקציות.

$$x^2 - 4x + 1 = 2x - 4$$

ב. חשב את השטח שמוגבל בין גרף הפונקציה f(x) לבין הגרף של הפונקציה הנגזרת f'(x).

פתרון

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

שני פתרונות: $\boldsymbol{x_2 = 5}$, $\boldsymbol{x_1 = 1}$

כיוון שאנו עובדים בלי שרטוט, אנחנו לא יודעים מי הפונקציה העליונה ומי הפונקציה התחתונה. לכן נשתמש **בערך מוחלט**.

$$S = \left| \int_1^5 [(2x - 4) - (x^2 - 4x + 1)]dx \right|$$

ב. חשב את השטח שמוגבל בין גרף הפונקציה f(x) לבין הגרף של הפונקציה הנגזרת f'(x).

פתרון

$$S = \left|\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx\right|$$

$$S = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x\right]_1^5\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right)\right|$$

ב. חשב את השטח שמוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

$$= \left|\frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)\right|$$

$$= \left|10\frac{2}{3}\right|$$

$$\boldsymbol{S = 10\frac{2}{3}}$$

בהצלחה