פתרון תרגיל

שטח המוגבל ע"י גרפים של שתי פונקציות (בין יותר משתי נקודות)

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 285, ת. 21

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

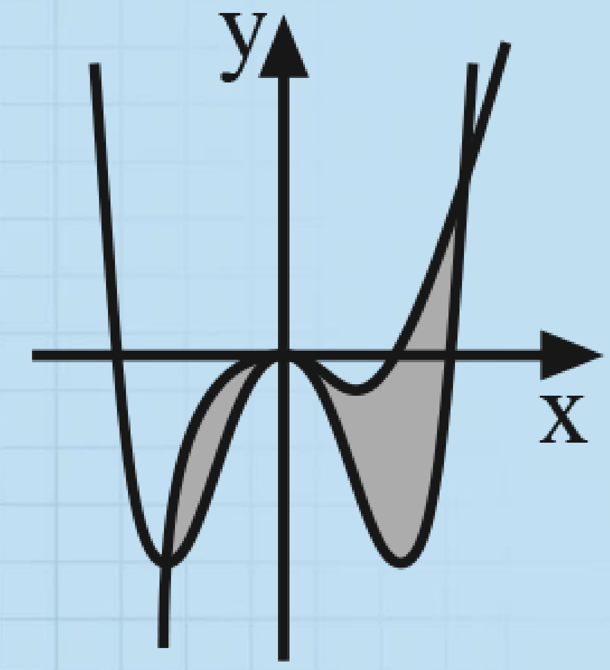
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה

21) בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)=x^4-3x^2$ ו-$g(x)=x^3-x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

ב. חשב את השטח ברביע הרביעי שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x.

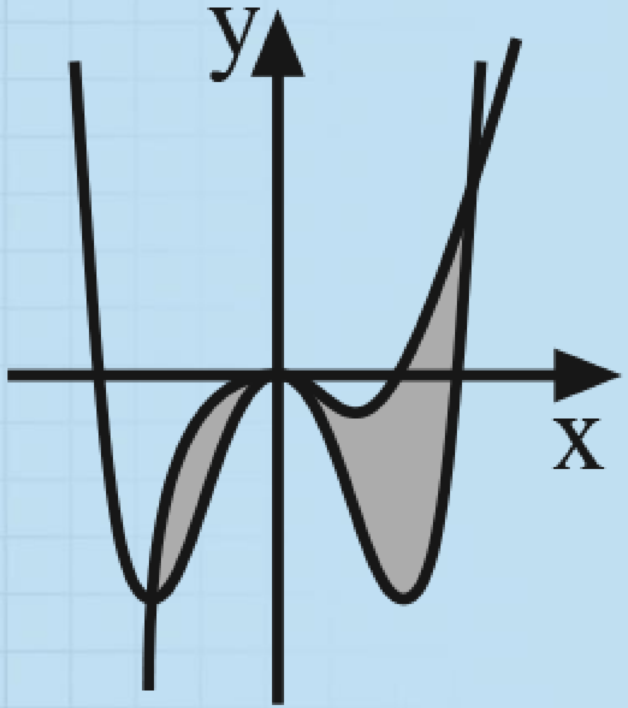


בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4-3x^2$ ו- $g(x) = x^3-x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

סעיף א':



$$f(x) = x^4 - 3x^2$$

$$g(x) = x^3 - x^2$$

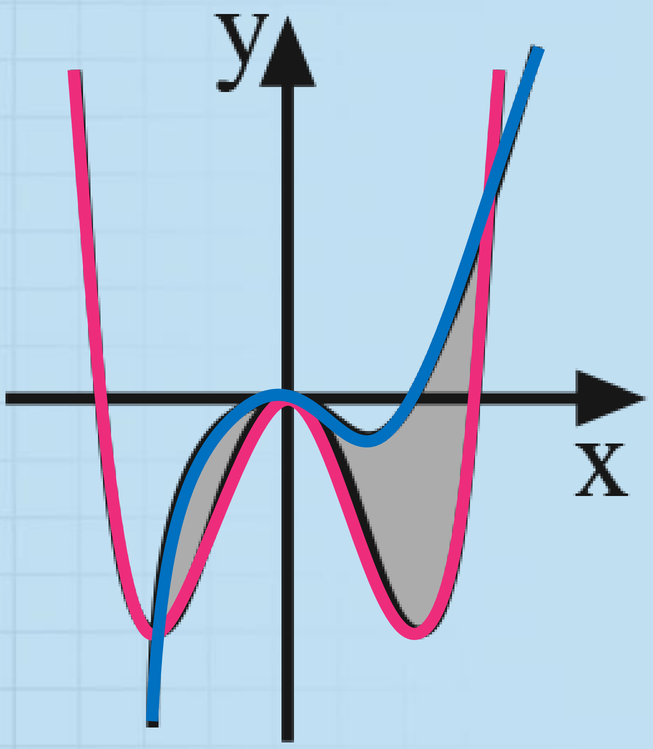
ראשית, יש להתאים בין $f(x)$ ו- $g(x)$ לבין הגרפים המתאימים להם.

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע״י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

סעיף א':



נשים לב שאחד הגרפים הוא **סימטרי** כלפי **ציר ה-y**,
ולכן הוא מתאים לפונקציה **זוגית**.

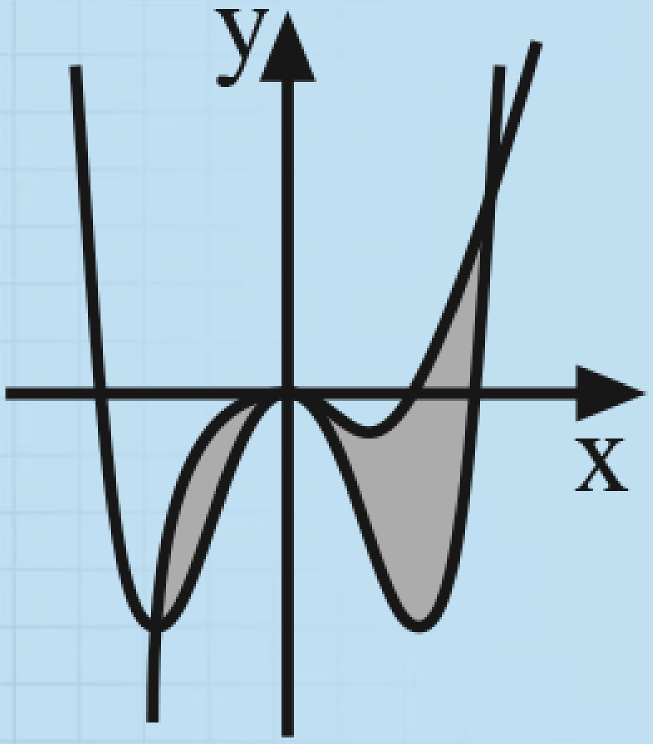
לפי הנוסחאות האלגבריות, הפונקציה $f(x)$ היא
פונקציה זוגית (זהו פולינום שמורכב מחזקות זוגיות
בלבד). לכן $f(x)$ מתאימה לפונקציה הוורודה, ו-
$g(x)$ מתאימה לפונקציה התכלת.

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

השטח האפור מורכב משני שטחים: השטח **השמאלי** והשטח **הימני**.



כדי למצוא את הגבולות של השטחים, יש למצוא את **נקודות החיתוך** של שתי הפונקציות.

$$x^4 - 3x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו- $g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x = 0$$

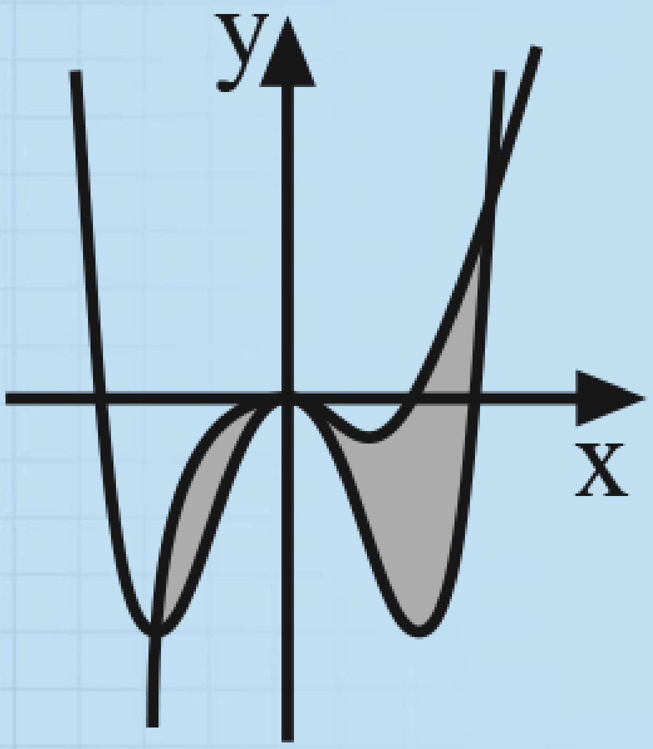
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1, \qquad x = 2$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון



השטח השמאלי:

הגבול **השמאלי**: $x = -1$. הגבול **הימני**: $x = 0$.

הפונקציה **העליונה**: $g(x) = x^3 - x^2$

הפונקציה **התחתונה**: $f(x) = x^4 - 3x^2$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} [(x^3 - x^2) - (x^4 - 3x^2)]dx$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו- $g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - x^4 + 3x^2)dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + 2x^2 - x^4)dx$$

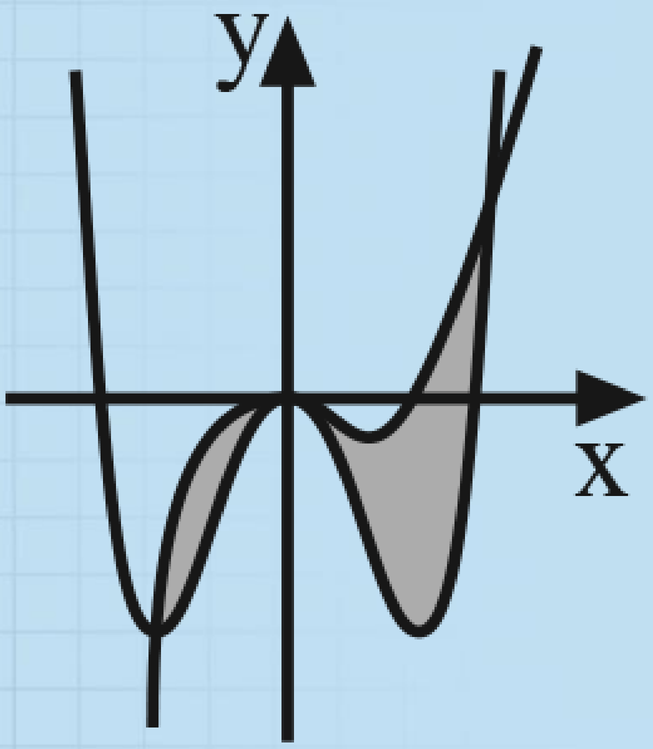
$$= \left[\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = (0) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + 2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5}\right)$$

$$= \frac{13}{60}$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4-3x^2$ ו- $g(x) = x^3-x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון



השטח הימני:

הגבול **השמאלי**: $x = 0$. הגבול **הימני**: $x = 2$.

הפונקציה **העליונה**: $g(x) = x^3 - x^2$

הפונקציה **התחתונה**: $f(x) = x^4 - 3x^2$

$$S_2 = \int_0^2 [(x^3 - x^2) - (x^4 - 3x^2)]dx$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

נשים לב לכך שהביטוי בתוך האינטגרל כאן **זהה** לביטוי שבתוך האינטגרל הקודם שעשינו. לכן ניתן לקצר מעט ולקבל:

$$S_2 = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 - x^4)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} + 2\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5}\right) - (0) = \frac{44}{15}$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4-3x^2$ ו- $g(x) = x^3-x^2$.

א. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח האפור).

פתרון

השטח האפור = $S_1 + S_2$

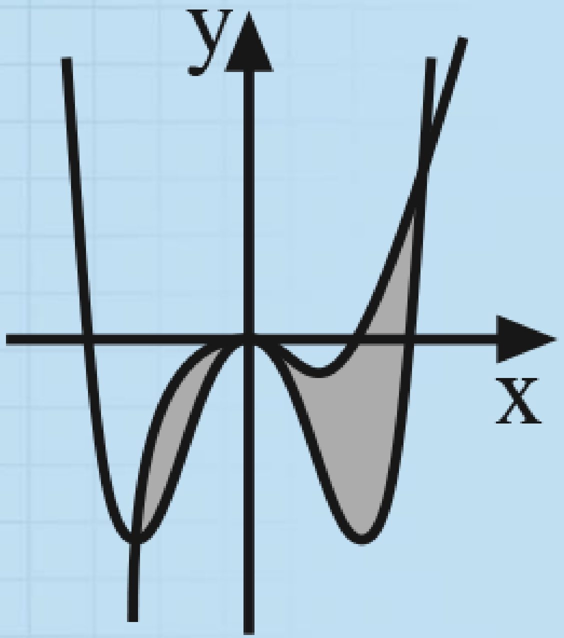
השטח האפור = $\frac{13}{60} + \frac{44}{15}$

השטח האפור = $\boxed{3\frac{3}{20}}$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4-3x^2$ ו-$g(x) = x^3-x^2$.

ב. חשב את השטח ברביע הרביעי שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x.

פתרון



<u>סעיף ב':</u>

יש למצוא את השטח המסומן ברביע הרביעי.

הגבול **השמאלי** של השטח: $x = 0$

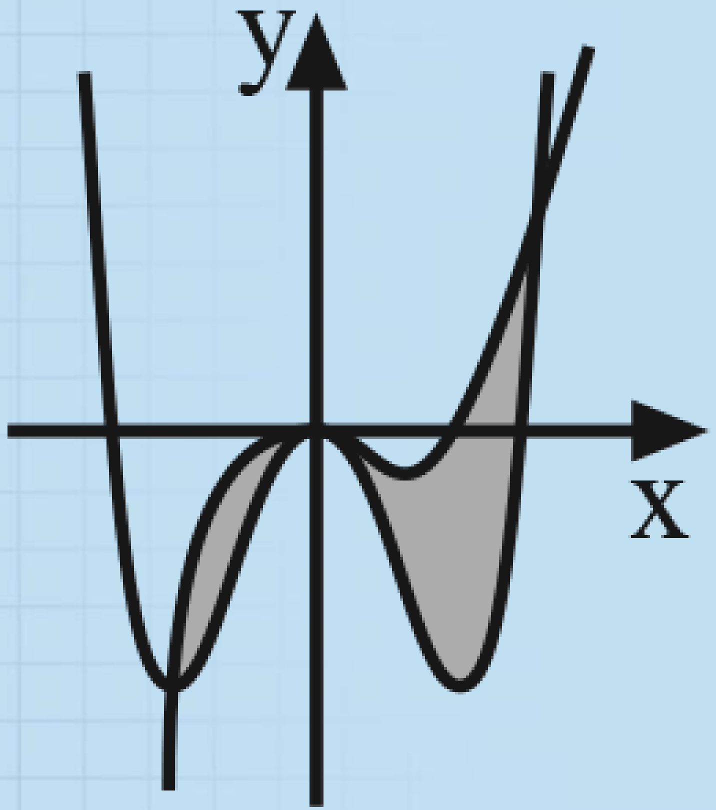
הגבול **הימני** של השטח הוא **נקודת החיתוך** של $g(x)$ עם ציר ה-x.

$$x^3 - x^2 = 0$$

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

ב. חשב את השטח ברביע הרביעי שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x.

פתרון



$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x - 1) = 0$$

מקבלים: $x = 1$, $x = 0$

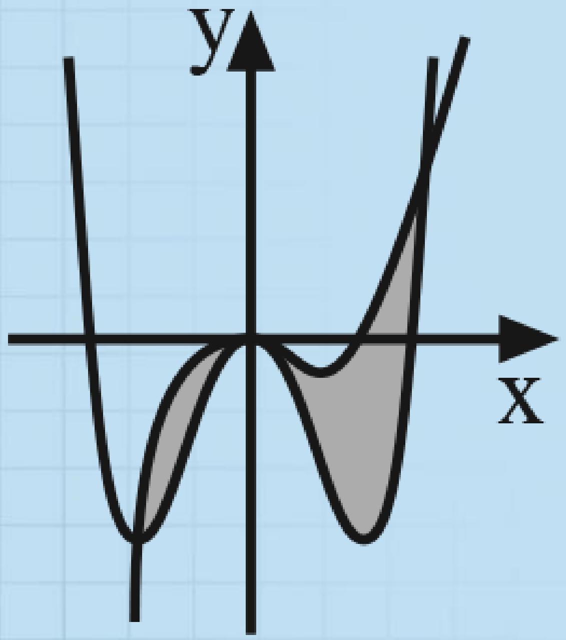
לכן הגבול **הימני** של השטח הוא: $x = 1$.

השטח נמצא **מתחת לציר ה-x**, ולכן נשתמש **בערך מוחלט**.

בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2$ ו-$g(x) = x^3 - x^2$.

ב. חשב את השטח ברביע הרביעי שמוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x.

פתרון



$$S = \left|\int_0^1 (x^3 - x^2)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3}\right) - (0)\right| = \boxed{\frac{1}{12}}$$

בהצלחה