הקנייה

שטח המוגבל ע"י גרף של פונקציה וציר ה –x –פולינומים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 270

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

הקנייה

<u>שטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר ה- x - פולינומים</u>

שטח מעל ציר ה-x, בין שני ישרים המאונכים לציר ה-x

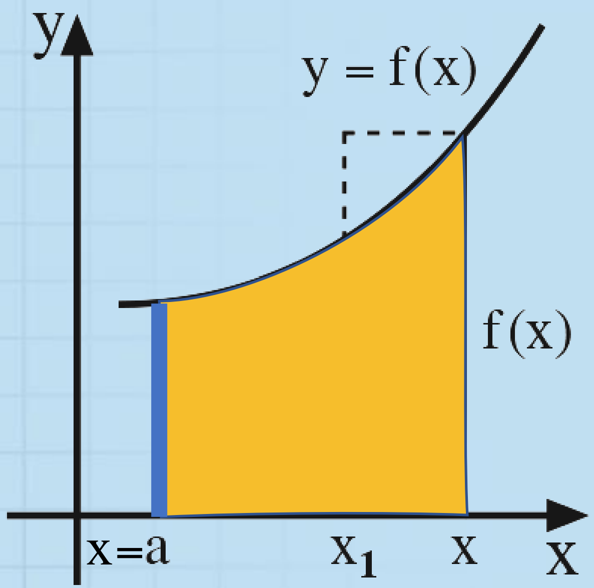
בסעיף זה נראה שימוש לאינטגרל המסויים של פונקציה והוא **חישוב שטח**. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$ (שיש לה פונקציה קדומה) והיא מקבלת ערכים **אי שליליים** בתחום $[a, x]$.

הקנייה

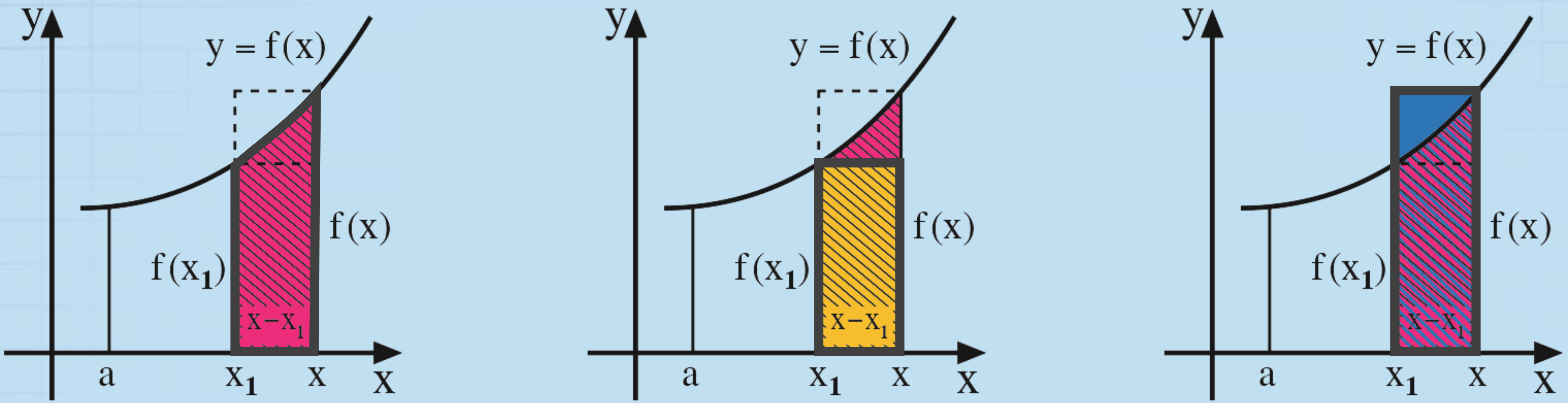
יש לחשב את **השטח המוגבל** ע"י **גרף הפונקציה, ציר ה-x ושני ישרים המקבילים לציר ה-y והעוברים דרך הנקודות** $(a,0)$ ו-$(x,0)$. הנקודה a **קבועה** והנקודה x יכולה **להשתנות**. השטח המבוקש **תלוי ב-x** לכן נסמנו ב-$S(x)$, כלומר הוא פונקציה של x.

כמו כן ברור שעבור $x = a$ השטח הוא **אפס** כלומר $S(a) = 0$.

ננסה לחשב את **הנגזרת** של הפונקציה $S(x)$. תהי x_1 נקודה הקרובה ל-x שגם דרכה עובר ישר המקביל לציר ה-y. נעריך את המנה $\frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1}$.



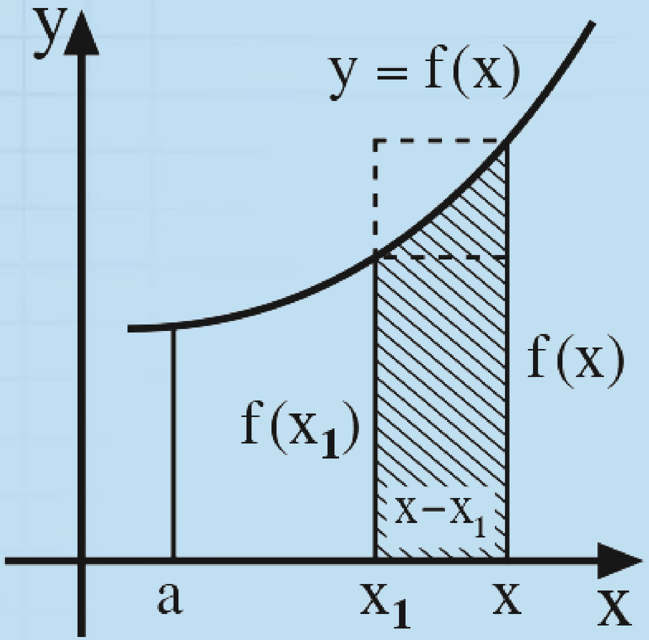
הקנייה



המונה $S(x)-S(x_1)$ הוא למעשה **השטח המקווקו**. שטח זה **גדול** משטח המלבן שרוחבו $x-x_1$ וגובהו $f(x_1)$ **וקטן** משטח המלבן שרוחבו גם הוא $x-x_1$ אבל גובהו $f(x)$. שטח המלבן הקטן הוא $f(x_1)\cdot(x-x_1)$ ושטח המלבן הגדול הוא $f(x)\cdot(x-x_1)$. כלומר קיבלנו $f(x_1)\cdot(x-x_1) \le S(x)-S(x_1) \le f(x)\cdot(x-x_1)$. נחלק ב-$x-x_1 > 0$ ונקבל:

$$f(x_1) \le \frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1} \le f(x).$$

הקנייה



$f(x_1) \le \frac{S(x)-S(x_1)}{x-x_1} \le f(x)$ כאשר x שואף ל-x_1 הביטוי האמצעי הוא למעשה **הנגזרת של הפונקציה $S(x)$ בנקודה x_1** כלומר $S'(x_1)$. כמו כן $f(x)$ שואף ל-$f(x_1)$, לכן נקבל $f(x_1) \le S'(x_1) \le f(x_1)$. ז"א $S'(x_1) = f(x_1)$. x_1 היתה נקודה כלשהי ולכן קיבלנו שלכל x $S'(x) = f(x)$, כלומר **נגזרת פונקציית השטח S שווה לפונקציה f**.

הקנייה

לסיכום: קיבלנו ש-$S(x)$ היא **פונקציה קדומה** של $f(x)$, כדי למצוא אותה יש לחשב את האינטגרל $\int f(x)\,dx$.

אם נניח ש-$F(x)$ היא פונקציה קדומה אחרת של $f(x)$ אז $S(x) = F(x) + c$. לכן גם $S(a) = F(a) + c$, אבל כאמור $S(a) = 0$ לכן $F(a) + c = 0$ כלומר $c = -F(a)$.

ז"א קיבלנו $S(x) = F(x) - F(a)$. אם $x = b$ $(a < b)$ נקבל לשטח: $S = F(b) - F(a)$.

הקנייה

לסיכום נקבל:

חישוב השטח – השטח המוגבל ע"י גרף של פונקציה אי שלילית $f(x)$ (שיש לה פונקציה קדומה), ציר ה-x, והישרים $x = a$ ו-$x = b$ (המאונכים לציר ה-x)

שווה לאינטגרל המסויים:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

בהצלחה