פתרון תרגיל

שטח מעל ומתחת לציר ה-x

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'-2

481 , עמ' 279, ת. 29

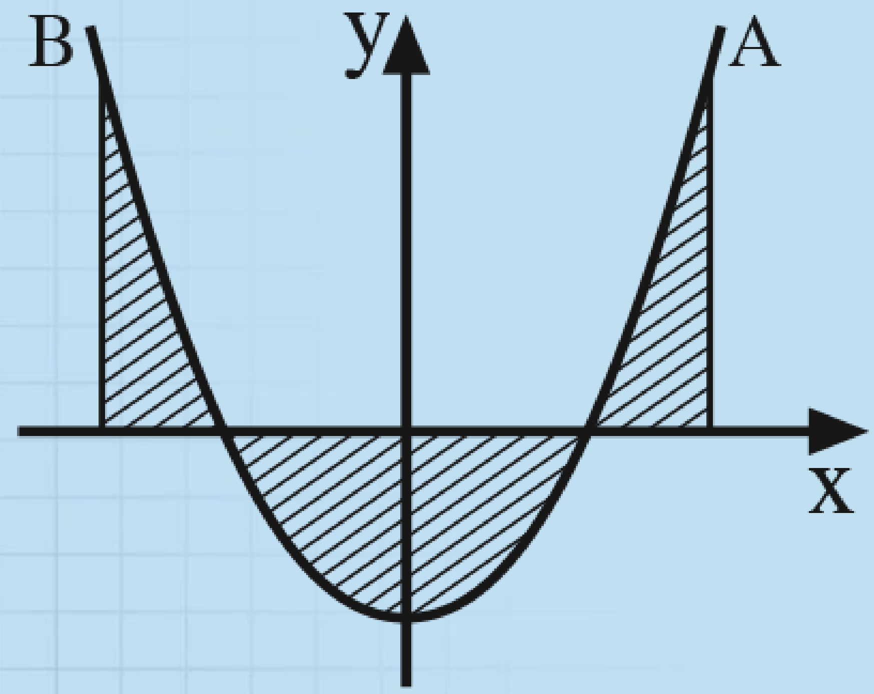
המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

29) בציור מתוארים גרף הפונקציה $y = x^2 - 4$ ושני ישרים המאונכים לציר ה-x שנמצאים במרחקים שווים מציר ה-y וחותכים את גרף הפונקציה בנקודות A ו-B כמתואר בציור.
מרחק הנקודות A ו-B מראשית הצירים הוא $\sqrt{34}$.

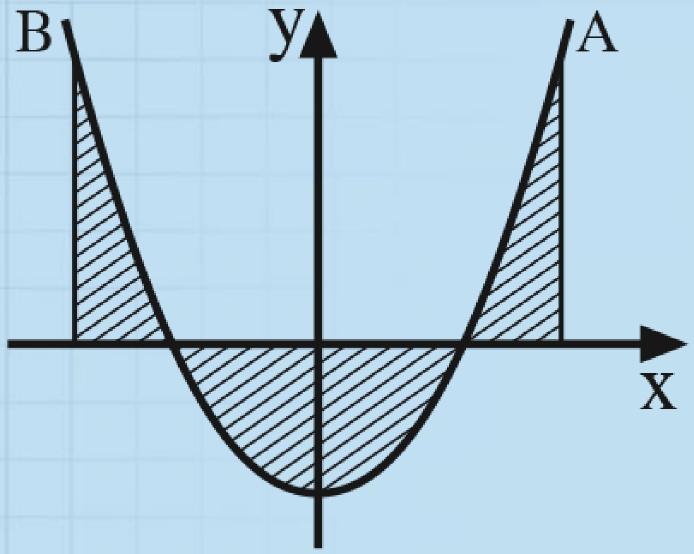
א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח שמוגבל ע״י גרף הפונקציה, הישרים המאונכים וציר ה-x.



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.

פתרון



סעיף א':

הנקודה A נמצאת על גרף הפרבולה, ולכן נסמן אותה כך:

$$A(x\ ,x^2-4)$$

גם הנקודה B נמצאת על גרף הפרבולה, ונתון שהמרחקים של A ושל B מציר ה- y שווים. לכן גם שיעורי ה- y של שתי הנקודות שווים.

לכן: $B\ \ (-x,\ x^2-4)$

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

פתרון

נתון שהמרחק של A ושל B מראשית הצירים הוא $\sqrt{34}$.

ניצור משוואה שלפיה המרחק בין הנקודה A לבין ראשית הצירים הוא $\sqrt{34}$.

תזכורת:

המרחק בין הנקודות (x_1, y_1) ו-(x_2, y_2) הוא: $\boxed{d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

פתרון

$$A\ (x,\ x^2 - 4) \qquad O\ (0,\ 0)$$

המרחק בין הנקודות (x_1, y_1) ו-(x_2, y_2) הוא: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x^2 - 4 - 0)^2} = \sqrt{34}$$

$$x^2 + (x^2 - 4)^2 = 34$$

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

פתרון

$$x^2 + x^4 - 8x^2 + 16 = 34$$

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0$$

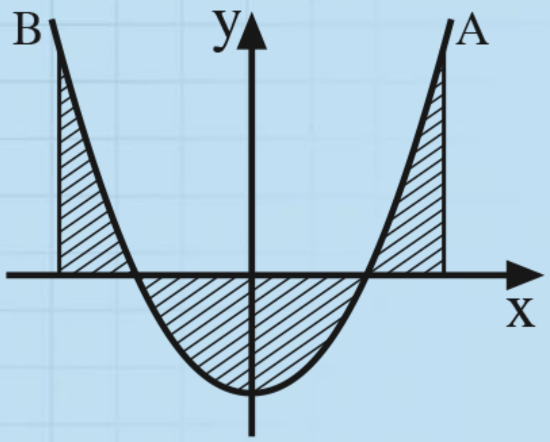
זוהי משוואה **<u>דו-ריבועית</u>**.

נסמן: $t = x^2$

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

מקבלים שני פתרונות: $t_1 = 9$ $t_2 = -2$

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.



פתרון

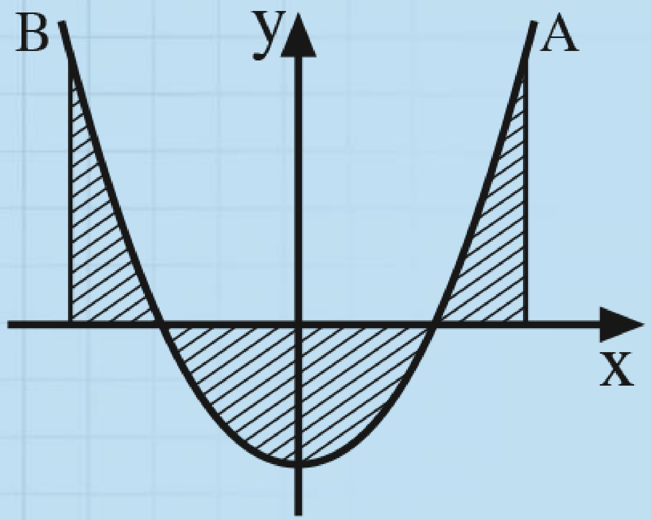
$$x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3 \,, \qquad x_2 = -3$$

$x^2 = -2 \quad \rightarrow$ אין פתרון

קיבלנו שיש **שתי נקודות** שהמרחק שלהן מראשית הצירים הוא $\sqrt{34}$.

לכן שיעור ה-x של הנקודה A הוא 3, ושיעור ה-x של הנקודה B הוא -3.

ב. חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה, הישרים המאונכים וציר ה-x.



פתרון

<u>סעיף ב':</u>

הפונקציה הנתונה היא הפרבולה: $y = x^2 - 4$.

מדובר בפונקציה **זוגית**, ולכן היא **סימטרית סביב ציר ה-y.**

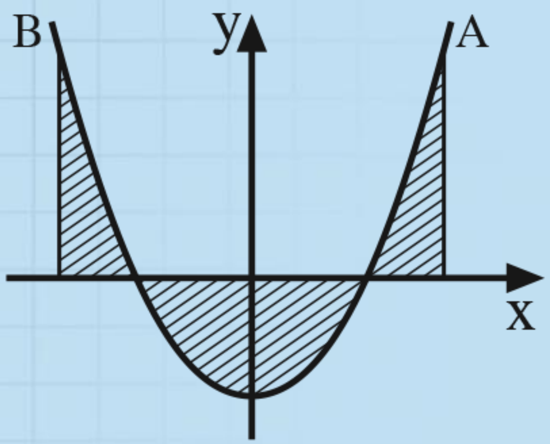
ידוע לנו שהנקודות A ו-B הן סימטריות סביב ציר ה-y.

מסקנה: השטח הימני ביותר **<u>שווה</u>** לשטח השמאלי ביותר.

לכן מספיק לחשב **רק אחד** מהשטחים האלה.

ב. חשב את השטח שמוגבל ע״י גרף הפונקציה,

פתרון



נמצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x.

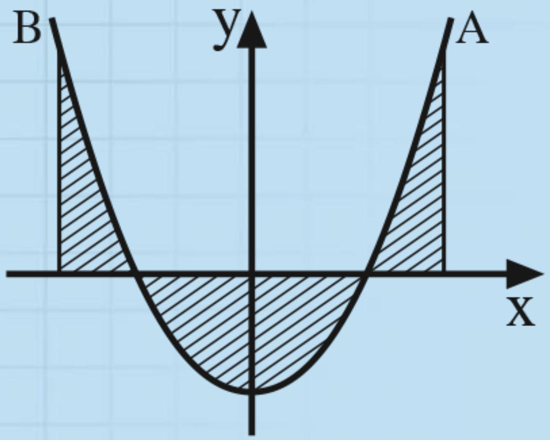
$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

ב. חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה,

פתרון



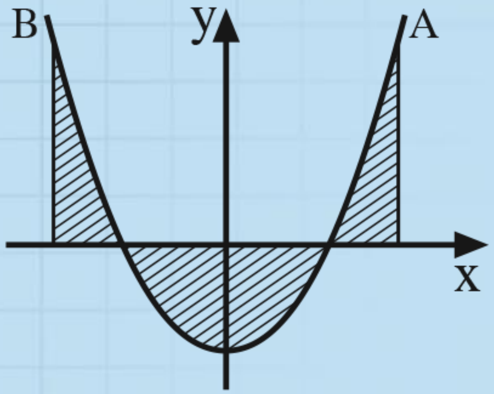
השטח הימני:

$$S=\int_2^3 (x^2-4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-4\cdot 3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-4\cdot 2\right)=-3-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{7}{3}$$

ב. חשב את השטח שמוגבל ע"י גרף הפונקציה,

פתרון



השטח האמצעי:

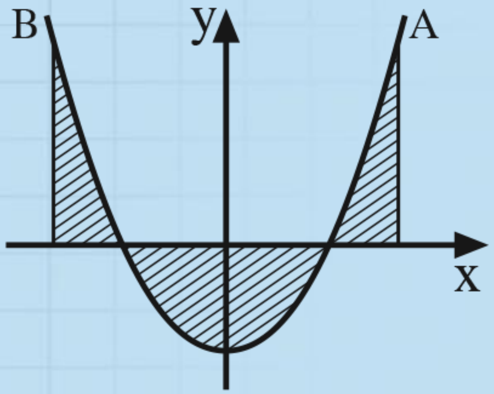
שטח זה נמצא **מתחת** לציר ה-x, ולכן יש להשתמש בערך מוחלט.

$$S = \left|\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx = \right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{2^3}{3}-4\cdot 2\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-4\cdot(-2)\right)\right|$$

ב. חשב את השטח שמוגבל ע״י גרף הפונקציה,

פתרון



$$= \left| -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \right| = \frac{32}{3}$$

השטח הכולל = השטח הימני + השטח השמאלי + השטח האמצעי

$$S = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \boxed{15\frac{1}{3}}$$

בהצלחה