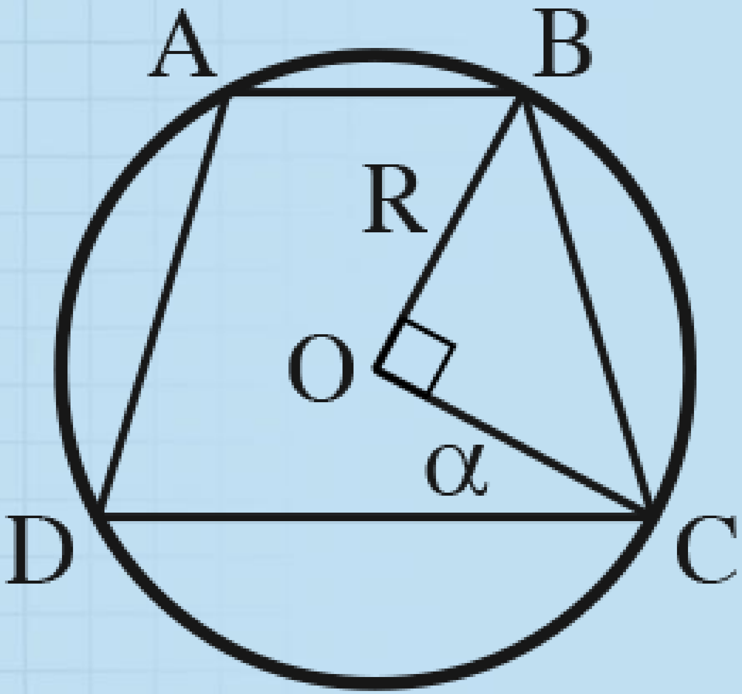
פתרון תרגיל

בעיות עם אותיות – מעגל (משולש ישר זוית)

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 366, ת. 5

השאלה

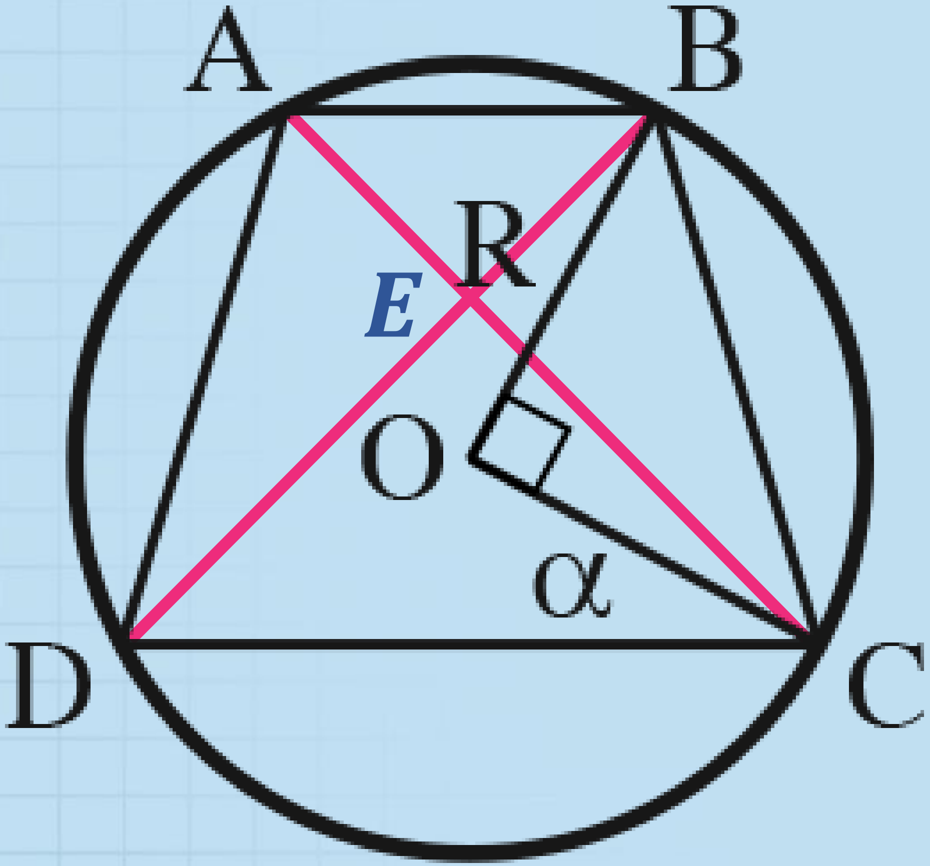


5) בתוך מעגל שרדיוסו R ומרכזו O
חסום טרפז $ABCD$. נתון:
$CO \perp BO$, $\sphericalangle DCO = \alpha$.

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון

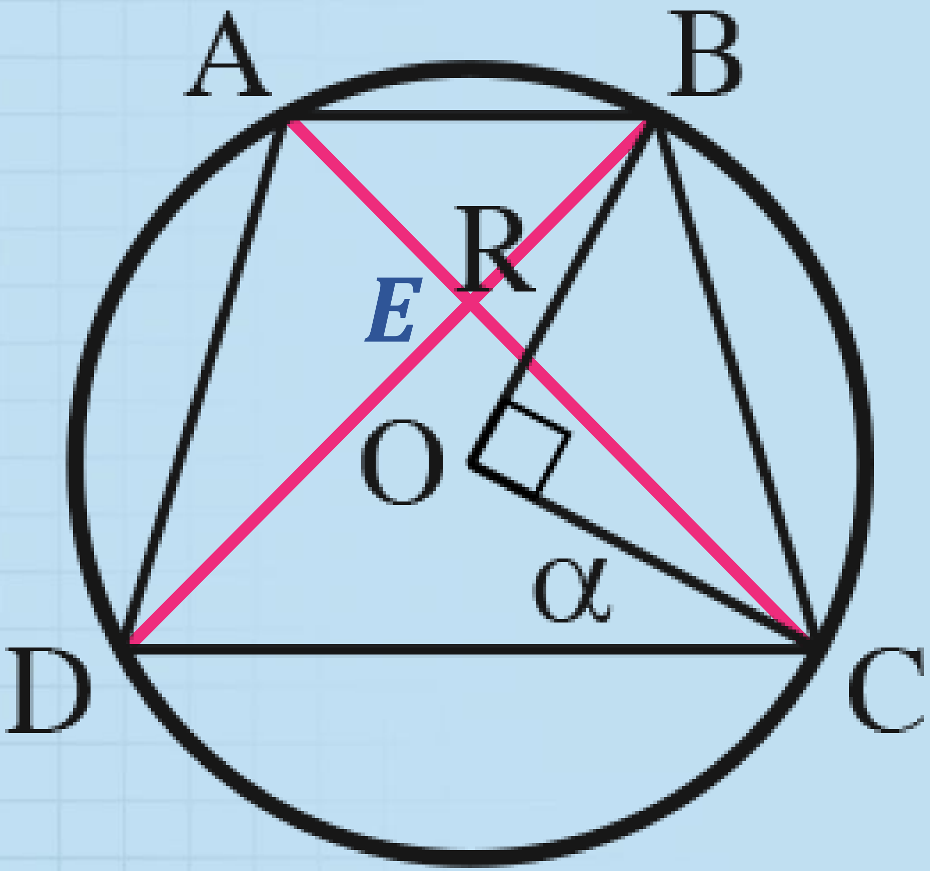


בסיסי הטרפז או הגובה אינם רלוונטיים באופן ישיר למערך הנתונים, לכן **נחשב את שטח המרובע באמצעות הנוסחה של מכפלת האלכסונים ב- sin הזווית שביניהם חלקי 2**

בניית עזר – אלכסוני הטרפז AC , BD נחתכים בנקודה E

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון



טרפז חסום במעגל הוא טרפז ש״ש

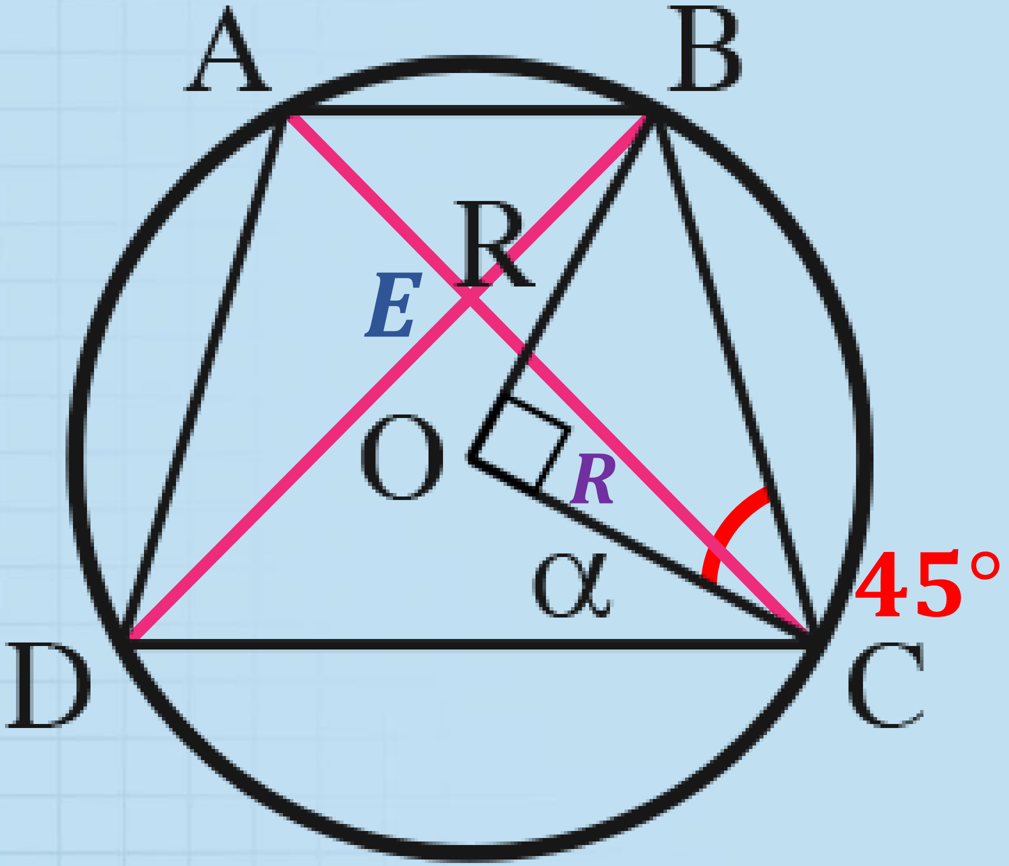
במרובע בר חסימה זוויות נגדיות משלימות ל-$180°$.

בטרפז זוויות סמוכות על כל שוק משלימות ל-$180°$.

בטרפז החסום במעגל, זוויות הבסיס לכל בסיס שוות ומכאן שמדובר בטרפז ש״ש.

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון



בטרפז ש"ש האלכסונים שווים

$$AC = BD$$

ΔBOC יש"ז וש"ש:

$$OB = OC = R$$

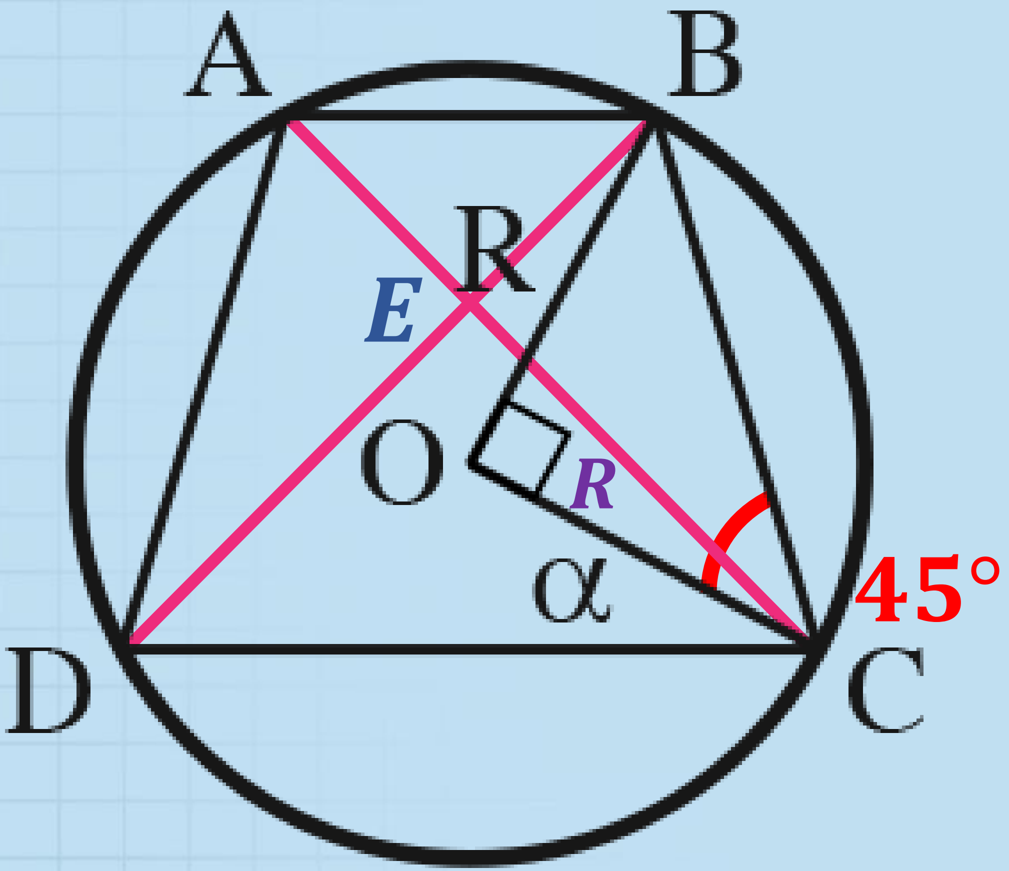
$$\sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = 45°$$

⬇

$$\sphericalangle DCB = 45° + \alpha$$

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון



ΔDBC : חסום במעגל שרדיוסו R

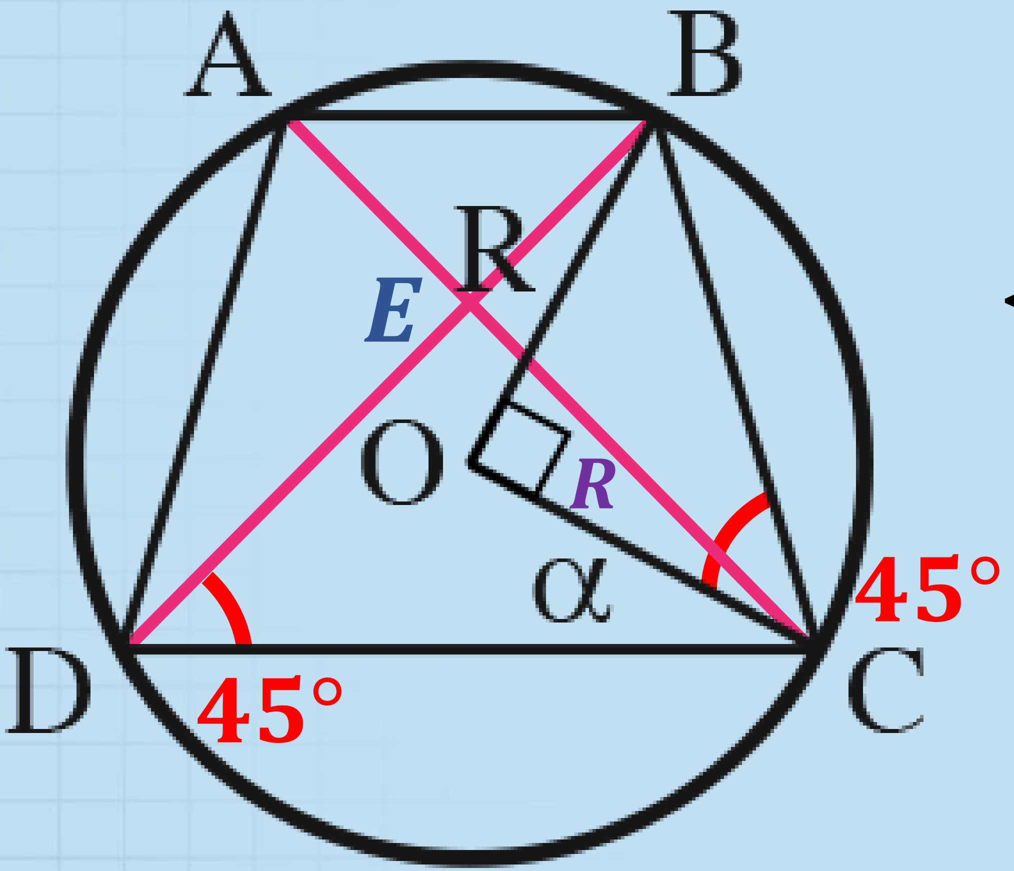
משפט הסינוסים:

$$\frac{BD}{\sin(45° + \alpha)} = 2R$$

$$BD = 2R\,sin(45° + \alpha)$$

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון



$\sphericalangle DEC = ?$

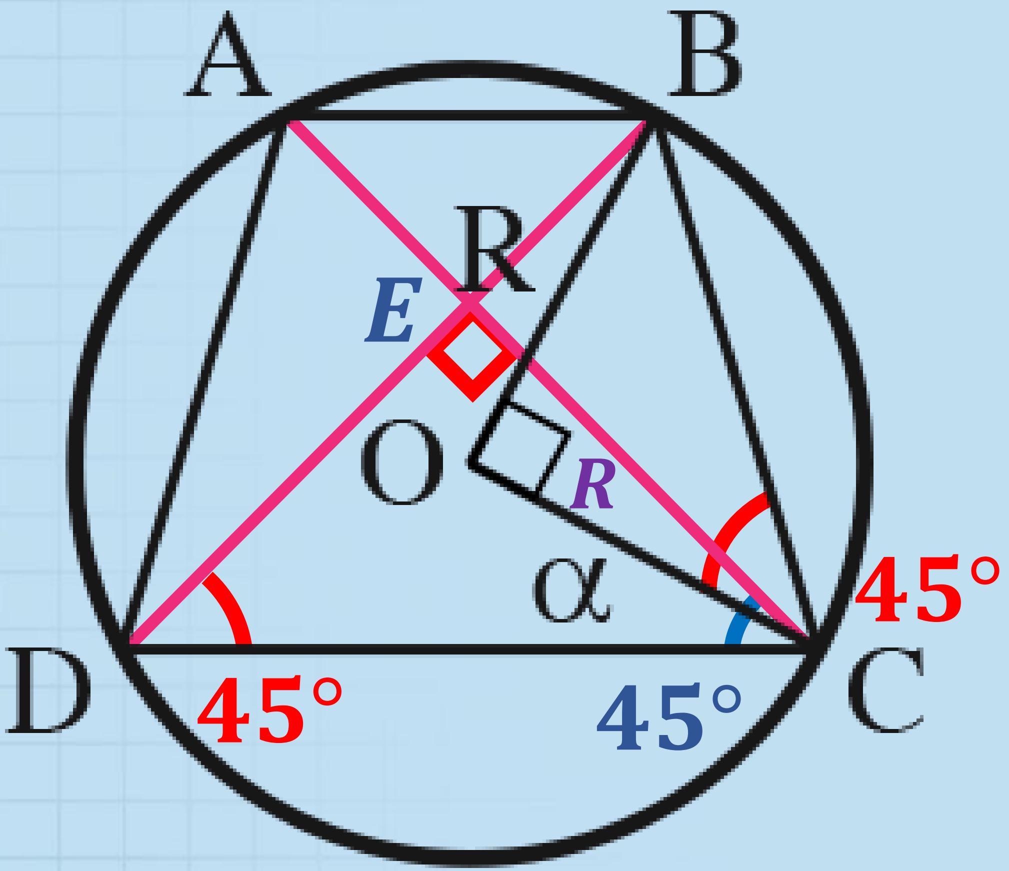
$\sphericalangle BOC$ זווית מרכזית הנשענת
על המיתר BC, כמו הזווית ההיקפית $\sphericalangle BDC$

זווית היקפית שווה למחצית זווית מרכזית
הנשענת על מיתר מאותו הצד

$$\sphericalangle BDC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון



$\sphericalangle DEC = ?$

$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = 45°$

זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים
שווים, שוקי הטרפז החסום, BC, AD

$\sphericalangle DEC = 90°$

משלימה ל- $180°$ במשולש ΔDEC

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון

$$S_{ABCD} = \frac{BD^2\ sin\sphericalangle DEC}{2} = \frac{[2R\sin(45° + \alpha)]^2\ sin\sphericalangle 90°}{2}$$

$$= \frac{4R^2[\sin(45° + \alpha)]^2\ \cdot 1}{2} = 2R^2[\sin(45° + \alpha)]^2$$

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון

לפי הזהות:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha+45^\circ) = \sin\alpha\cos45^\circ + \sin45^\circ\cos\alpha$$

$$= \sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$[\sin(\alpha+45^\circ)]^2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]^2 = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2}$$

הבע באמצעות R ו-α את שטח הטרפז.

פתרון

$$S_{ABCD} = \frac{BD^2 \sin\sphericalangle DEC}{2} = 2R^2[\sin(45° + \alpha)]^2$$

$$= 2R^2 \cdot \frac{(sin\alpha + cos\alpha)^2}{2} = R^2(sin\alpha + cos\alpha)^2$$

מ.ש.ל

בהצלחה