פתרון תרגיל

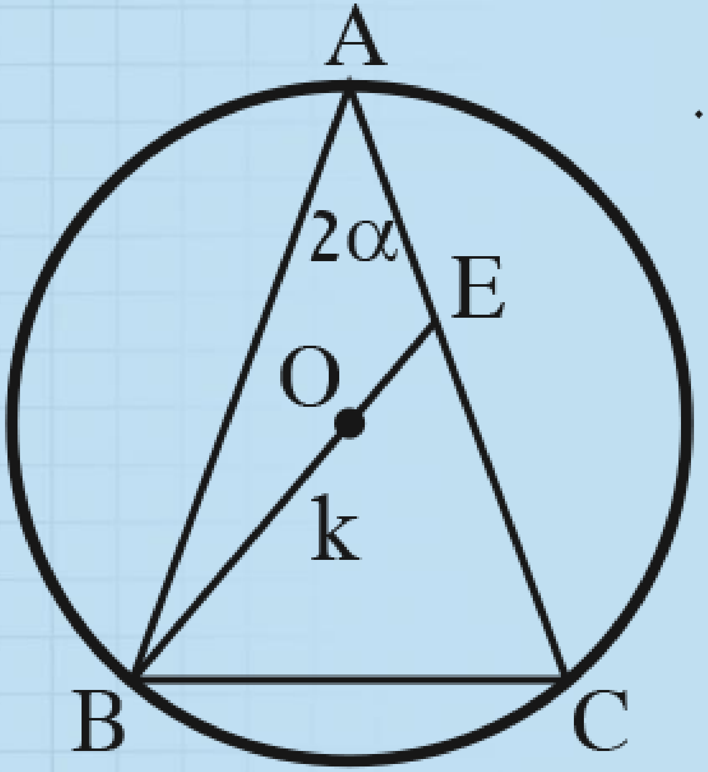
מעגל – משפט הסינוסים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 388, ת. 16

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה



16) מעגל שמרכזו O חוסם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.
דרך הקודקוד B והמרכז O העבירו ישר החותך את השוק AC
בנקודה E. נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $BE = k$.

א. הבע באמצעות α את הזויות ABE ו-AEB.
(**הדרכה:** העבר את הרדיוס AO).

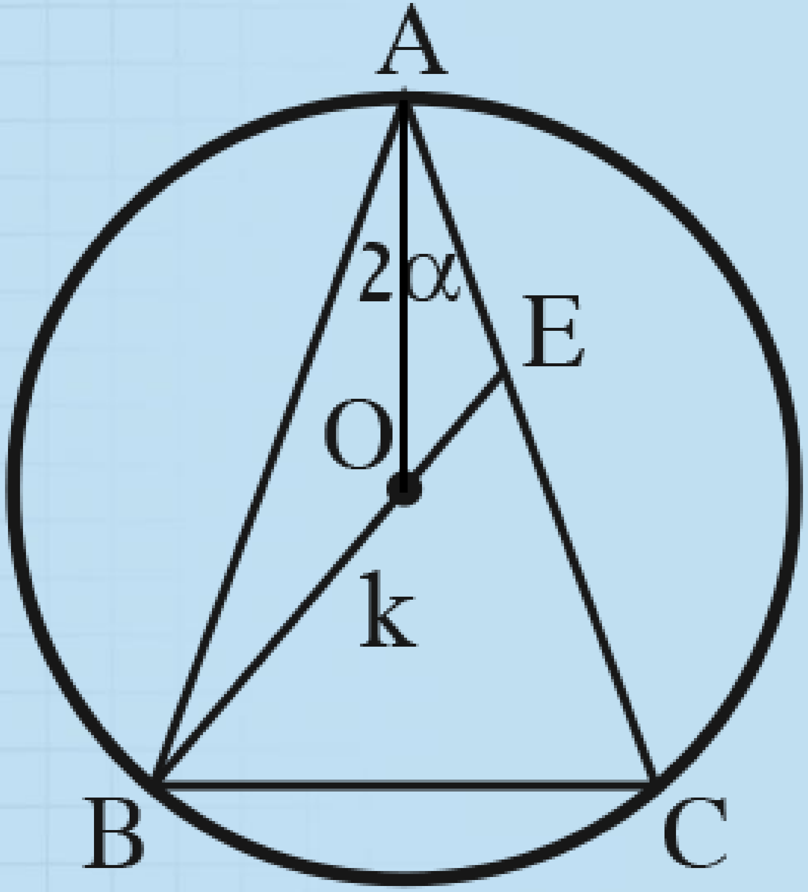
ב. הבע באמצעות k ו-α את השוק AB.

ג. הבע באמצעות k ו-α את רדיוס המעגל.

ד. הבע באמצעות k את הרדיוס אם $\alpha = 30^o$.

א. הבע באמצעות α את הזויות ABE ו-AEB.

פתרון



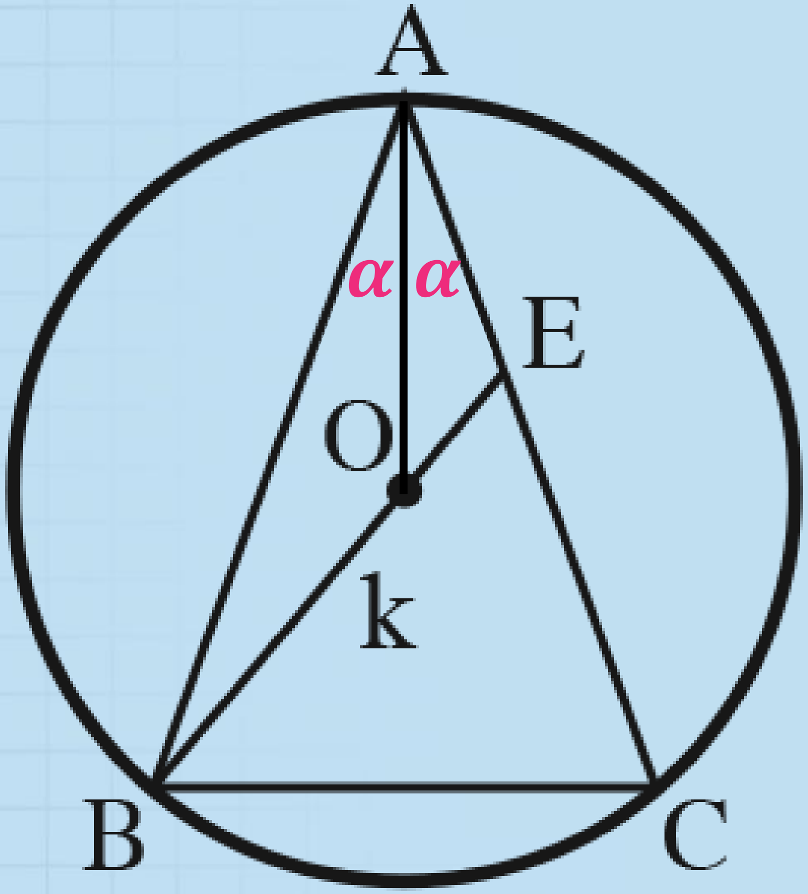
בניית עזר OA

מרכז המעגל החוסם משולש – מפגש אנכים אמצעיים

מכיוון שמדובר במש״ש,
נקודת מפגש אנכים אמצעיים, O ,
בהכרח ממוקמת על ציר הסימטריה –
גובה ל**בסיס**, תיכון ל**בסיס**
וחוצה זווית ה**ראש**

א. הבע באמצעות α את הזויות ABE ו-AEB.

פתרון



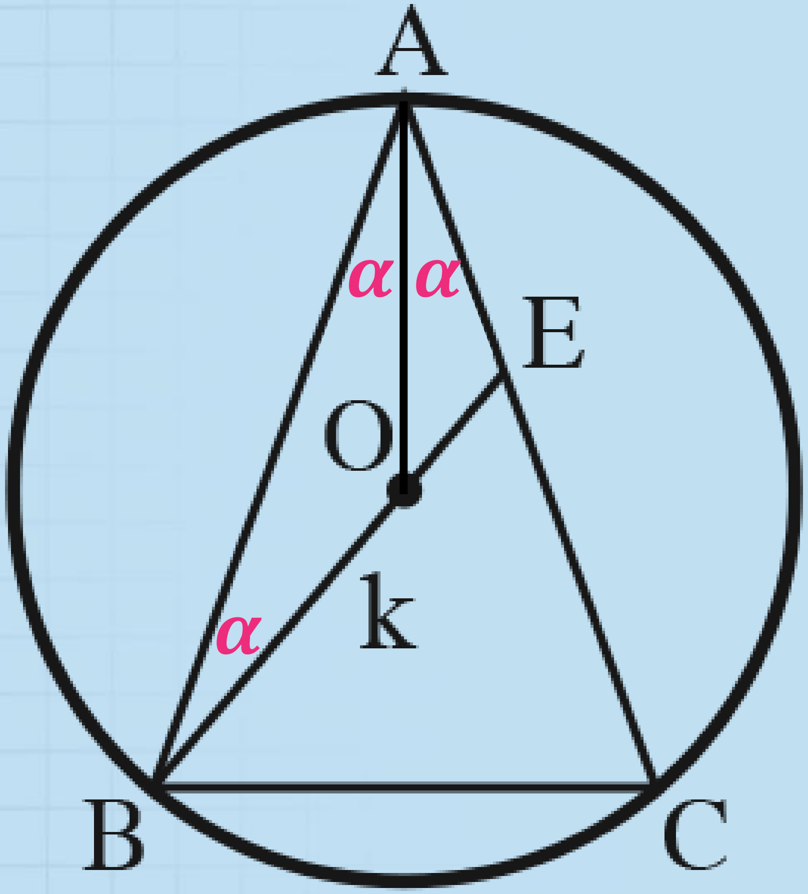
המשך AO ציר סימטריה במש"ש ΔABC

AO חוצה זווית הראש $\measuredangle A$

$$\measuredangle BAO = \measuredangle OAE = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

א. הבע באמצעות α את הזויות ABE ו-AEB.

פתרון



$$OA = OB = R$$

$$\Downarrow$$

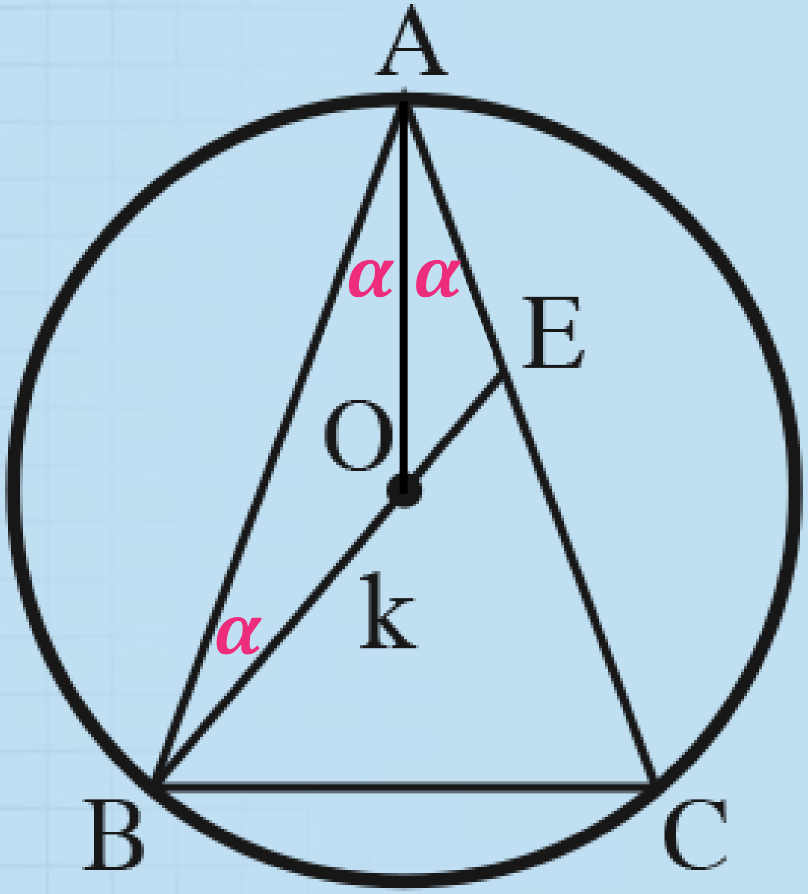
$$\measuredangle BAO = \measuredangle OBA = \alpha$$

באותו משולש, מול צלעות שוות
מונחות זוויות שוות

מ.ש.ל

א. הבע באמצעות α את הזויות ABE ו-AEB.

פתרון



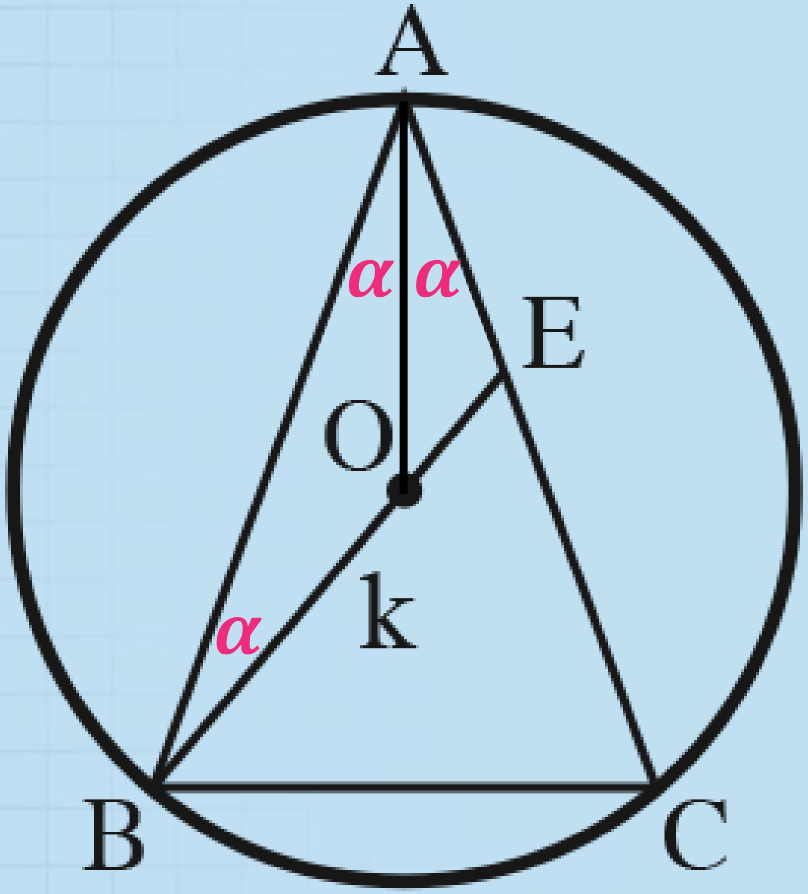
זווית $\sphericalangle AEB$ תשלים את שתי הזוויות האחרות במשולש ΔAEB ל- $180°$

$$\sphericalangle AEB = 180° - 3\alpha$$

מ.ש.ל א'

ב. הבע באמצעות k ו-α את השוק AB.

פתרון



ΔABE: משפט הסינוסים

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{k}{\sin 2\alpha}$$

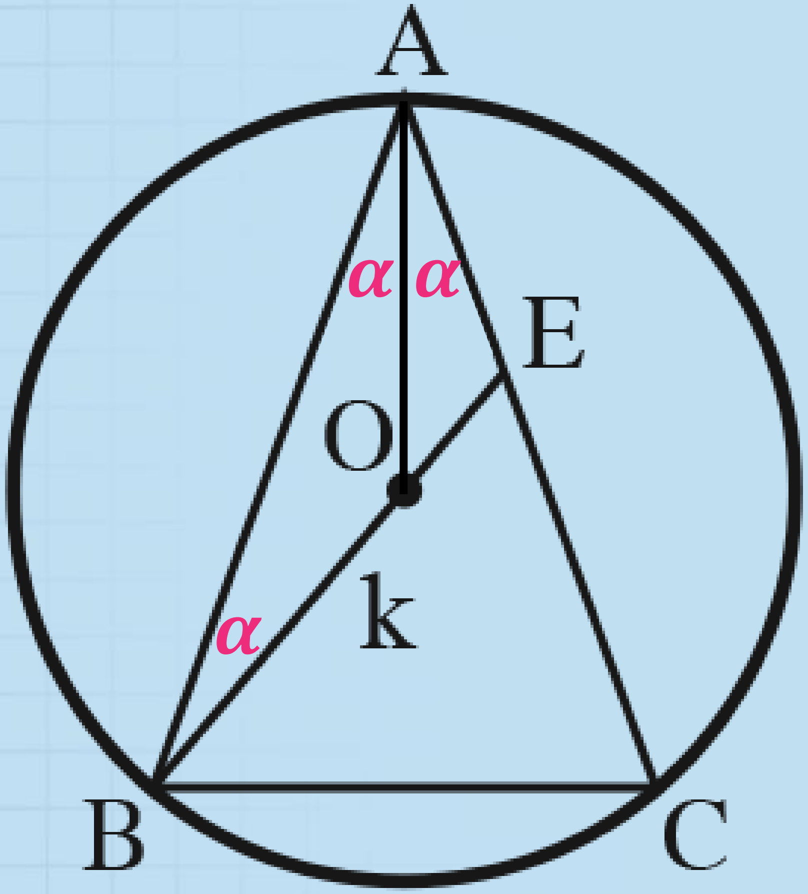
$sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ לפי הזהות

$$AB = \frac{k \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

מ.ש.ל ב'

ג. הבע באמצעות k ו-α את רדיוס המעגל.

פתרון



ΔABC חסום במעגל

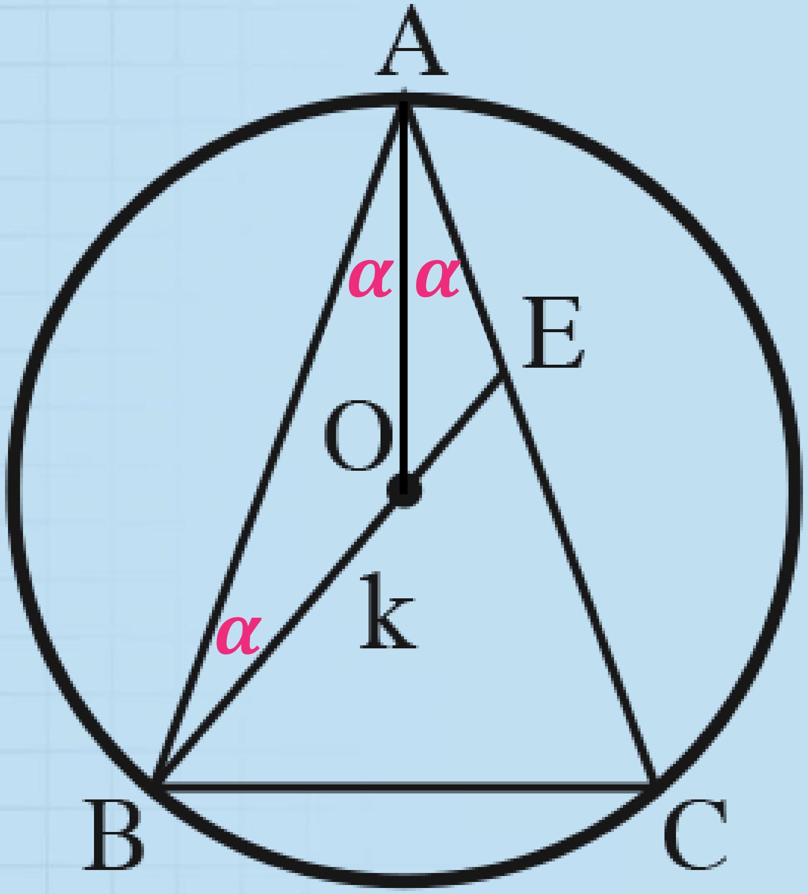
משפט הסינוסים:

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle C} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2\sin\sphericalangle C}$$

ג. הבע באמצעות k ו-α את רדיוס המעגל.

פתרון



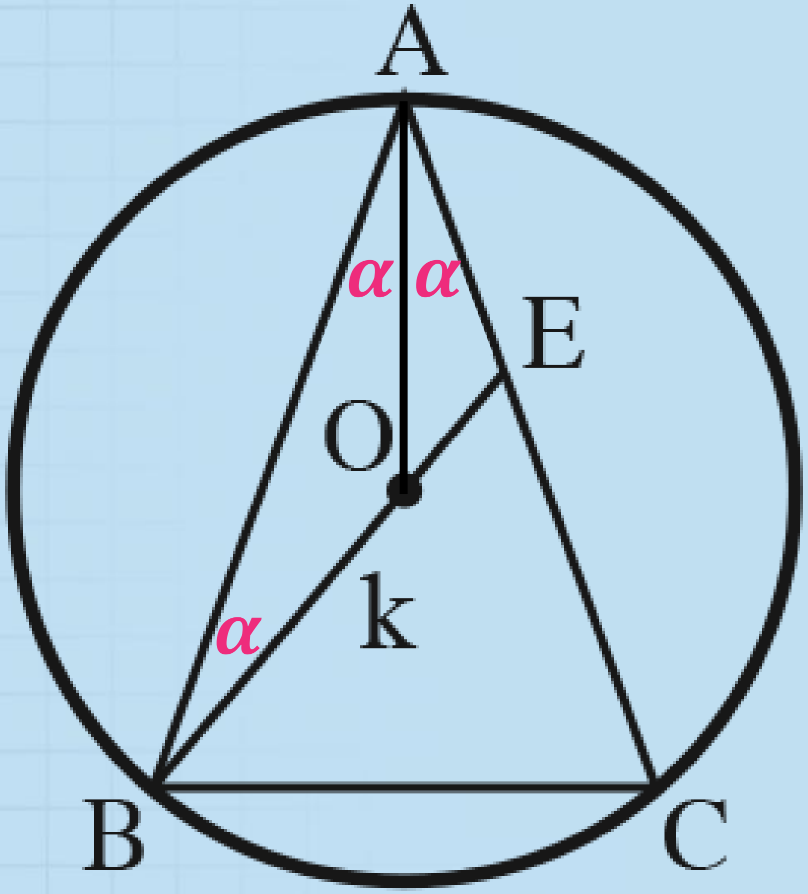
זווית $\measuredangle C$ היא זווית הבסיס

במש"ש ΔABC

$$\measuredangle C = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$$

ג. הבע באמצעות k ו-α את רדיוס המעגל.

פתרון



$$R = \frac{AB}{2sin\sphericalangle C} = \frac{\frac{k\ \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}}{2\ sin\sphericalangle(90^\circ - \alpha)}$$

לפי הזהות $\sin(90^\circ - \alpha) = cos\alpha$

$$R = \frac{k\ \sin 3\alpha}{2\ \sin 2\alpha\ cos\alpha}$$

מ.ש.ל ג'

ד. הבע באמצעות k את הרדיוס אם $\alpha = 30^{\circ}$.

פתרון

לפי סעיף ג'

$$R = \frac{k \sin 3\alpha}{2 \sin 2\alpha \, cos\alpha}$$

נציב $\alpha = 30^{\circ}$

$$R = \frac{k \sin(3 \cdot 30^{\circ})}{2 \sin(2 \cdot 30^{\circ}) \, cos30^{\circ}} = \frac{k \cdot 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2k}{3}$$

מ.ש.ל ד'

בהצלחה