פתרון תרגיל

מעגל – משפט הסינוסים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 383, ת. 43

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

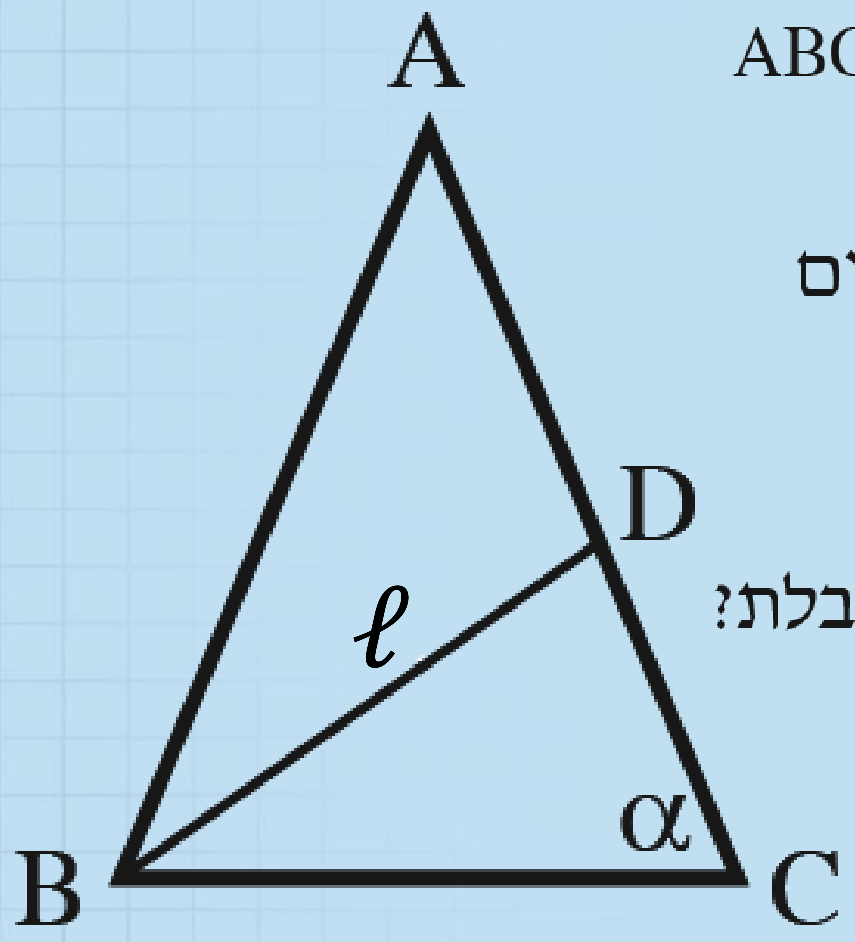
השאלה

43) BD הוא חוצה הזווית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

ב. הצב $\alpha = 60^{\circ}$ והבע את הרדיוס בעזרת ℓ.

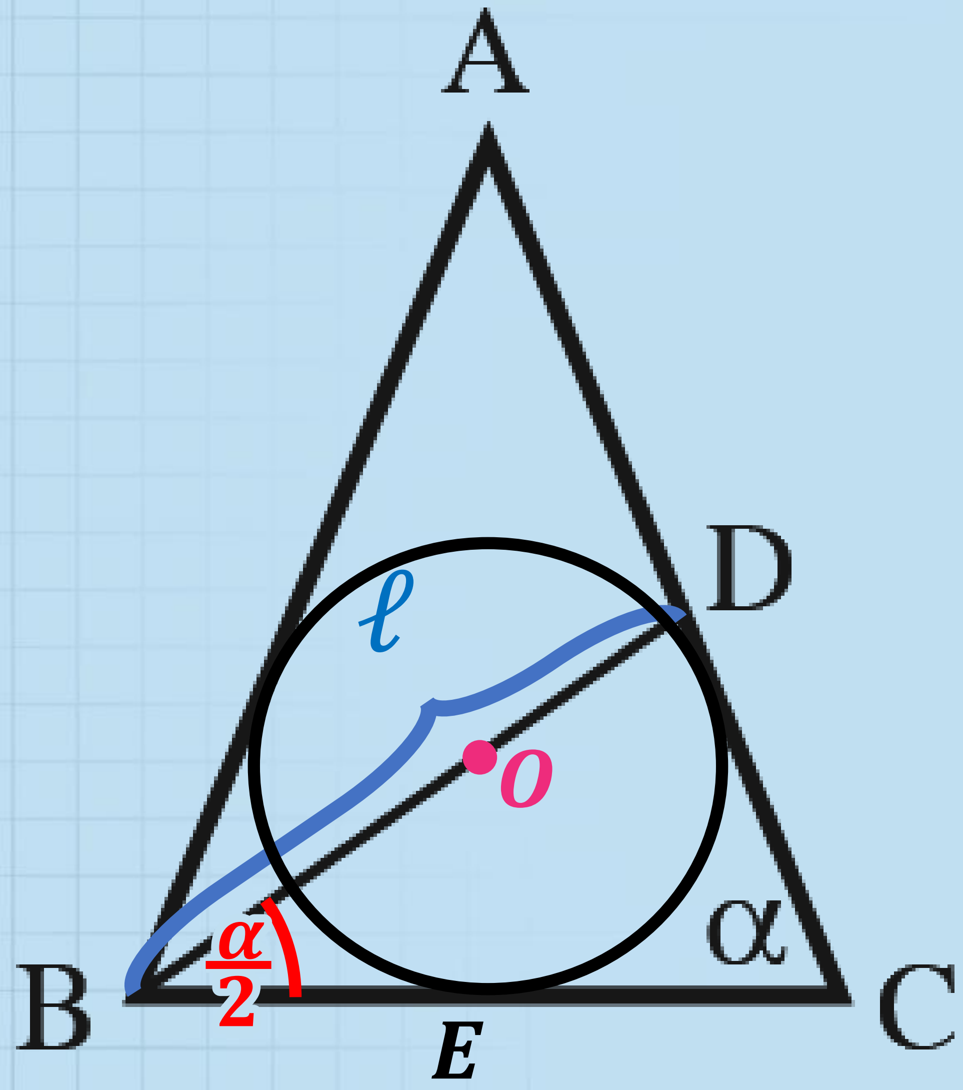
ג. מהי המשמעות הגיאומטרית של התוצאה שקיבלת?



BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



ראשית, נוסיף לסרטוט את המעגל החסום במשולש ΔABC, שמרכזו O

מרכז המעגל החסום - מפגש חוצי זווית

BD חוצה זווית $\sphericalangle ABC$ עובר דרך מרכז המעגל

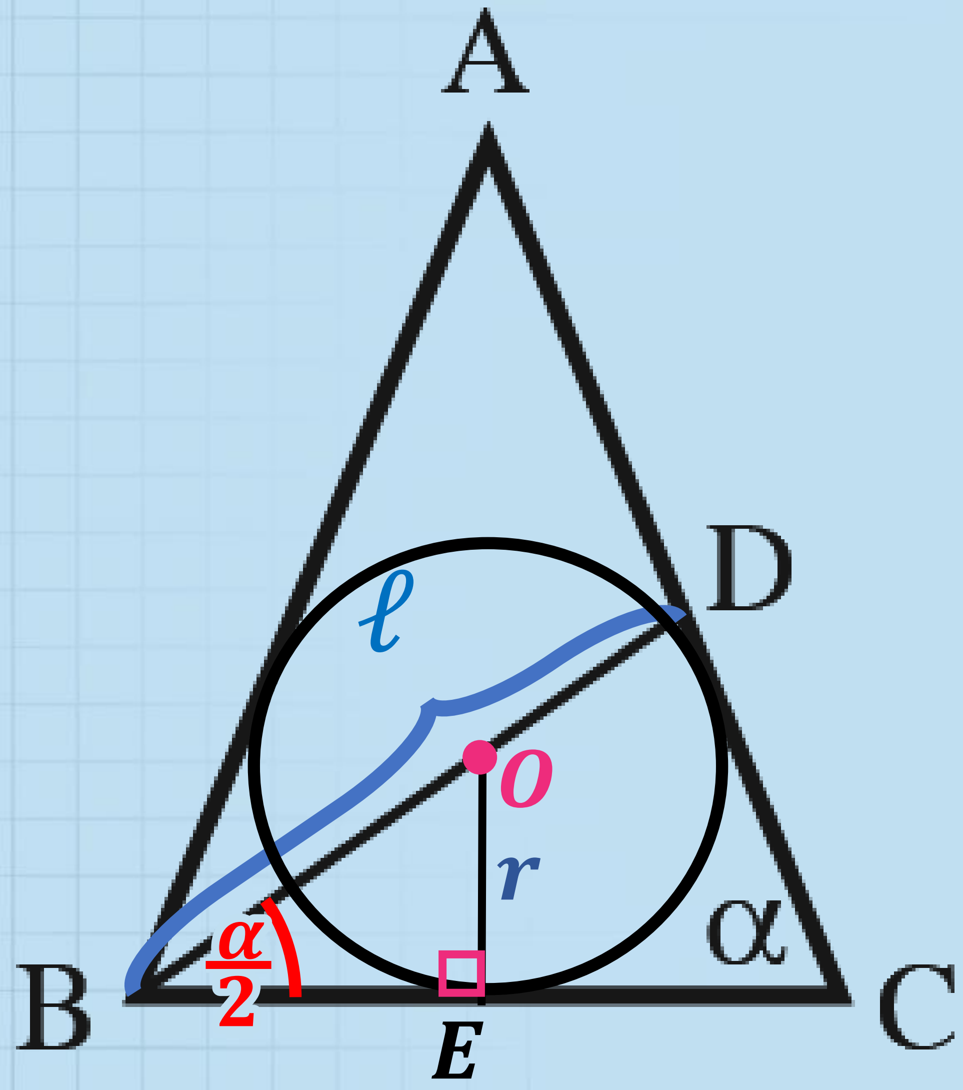
$$\sphericalangle DBC = \frac{\alpha}{2}$$

נסמן את נקודת ההשקה לצלע BC - E

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו AB = AC. נתון: ∡C = α, BD = ℓ.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



בניית עזר $OE = r$, רדיוס המעגל החסום

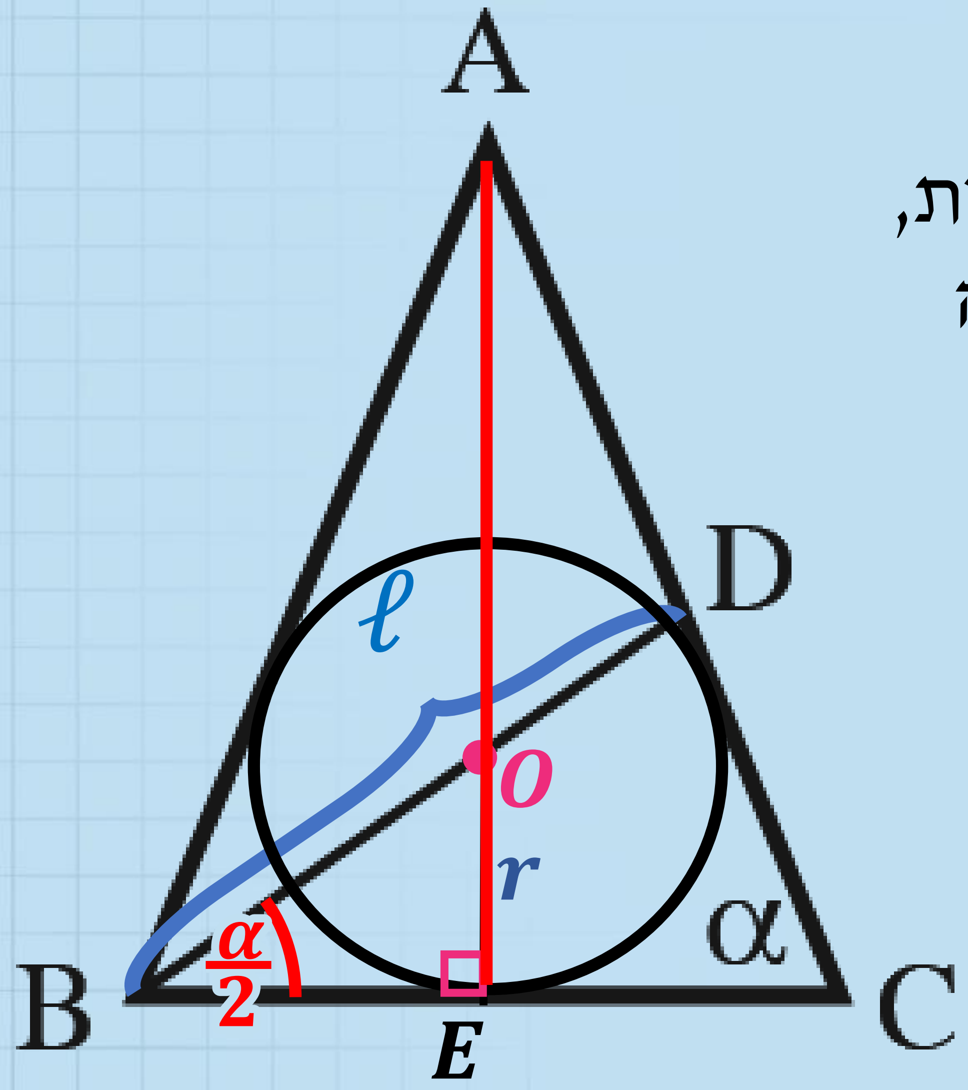
משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה:

$$OE \perp BC$$

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



מכיוון שמדובר במש״ש, נקודת מפגש חוצי זווית, O, בהכרח ממוקמת על ציר הסימטריה – גובה **לבסיס**, תיכון **לבסיס** וחוצה זווית **הראש**

המשך OE יעבור בנקודה A

AE ציר סימטריה במש״ש ΔABC:

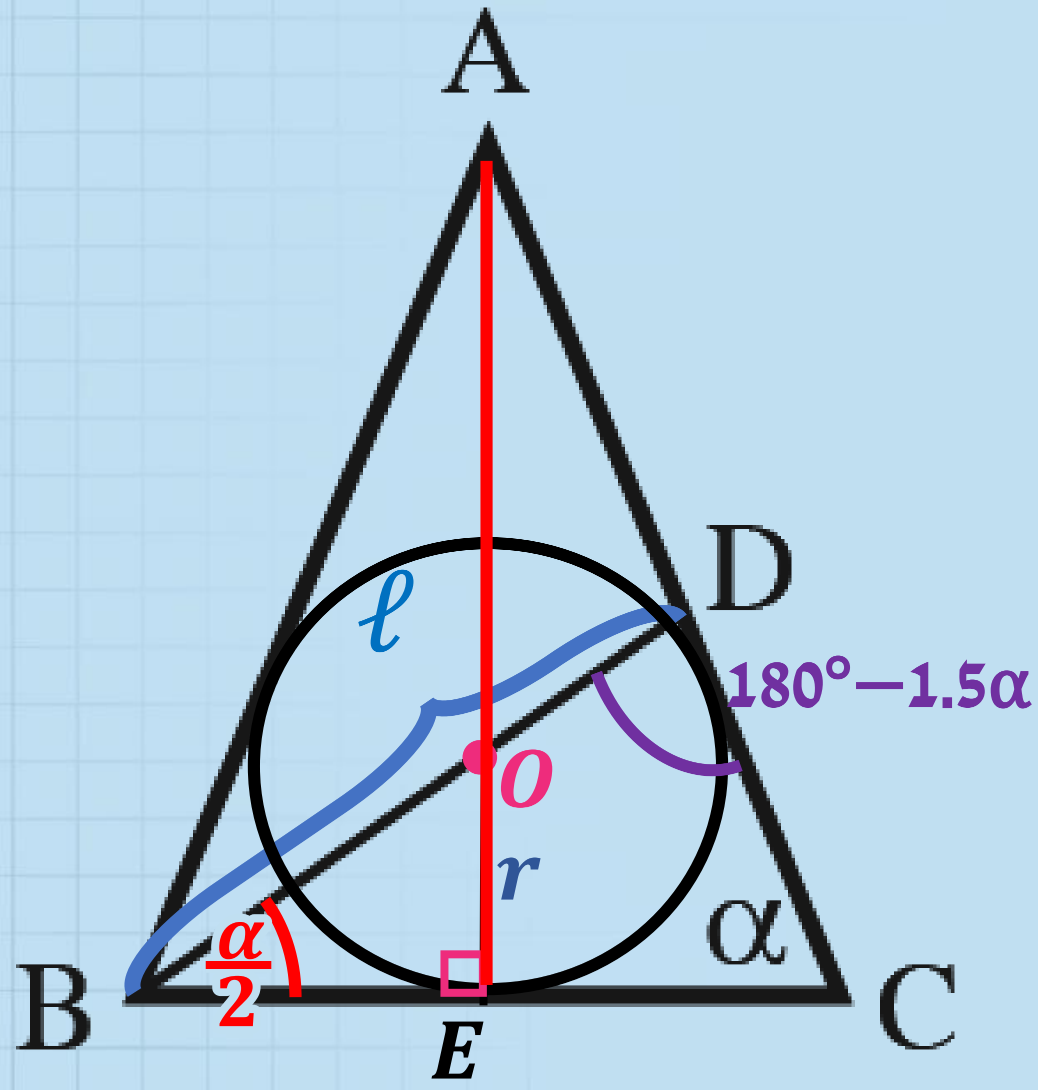
AE תיכון לבסיס BC

$$BE = \frac{BC}{2}$$

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו AB = AC. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



:ΔBDC

הזווית $\sphericalangle BDC$ תשלים את השתיים האחרות ל- 180°

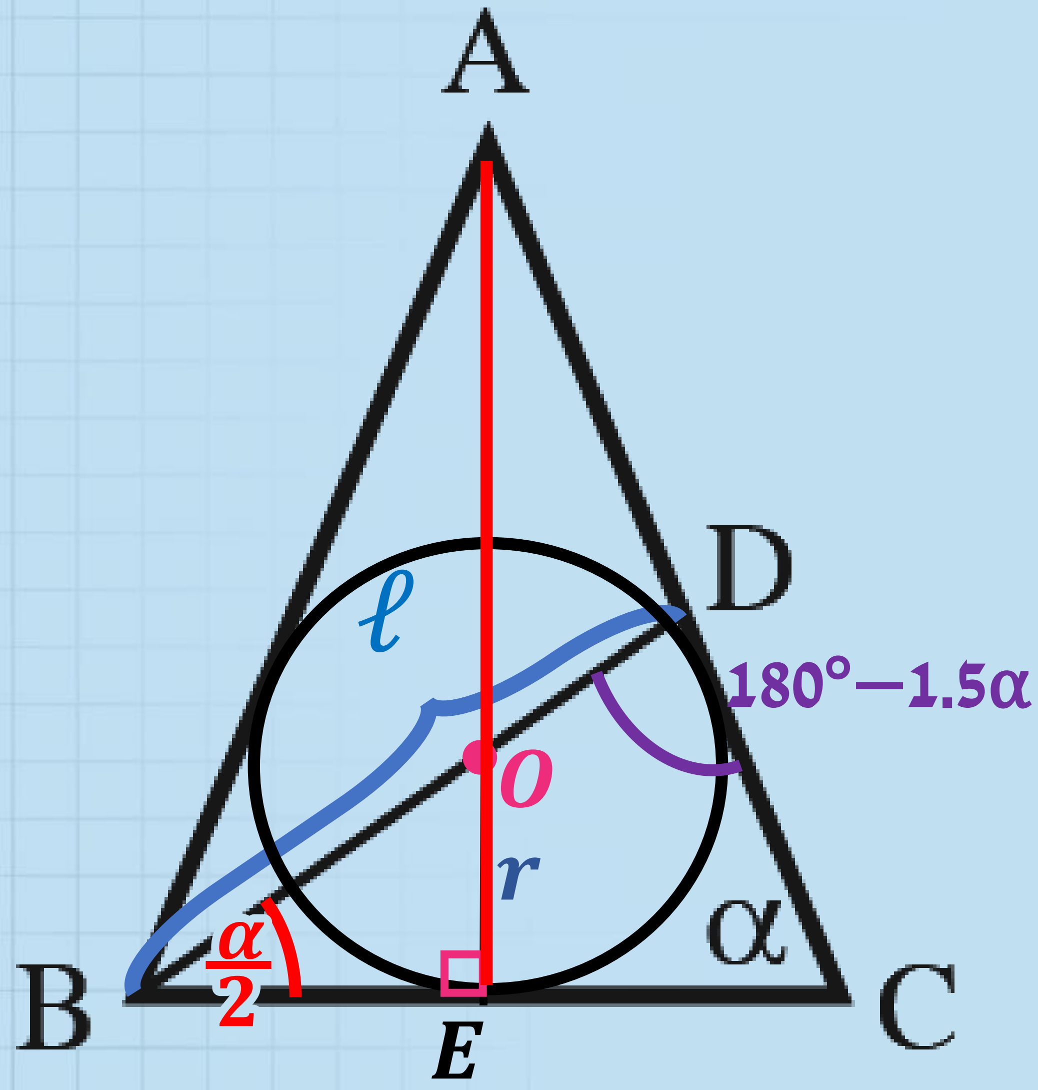
$$\sphericalangle BDC = 180° - \left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 180° - 1.5\alpha$$

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו AB = AC. נתון: ∢C = α, BD = ℓ.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



ΔBDC: משפט הסינוסים

$$\frac{BC}{\sin(180° - 1.5\alpha)} = \frac{\ell}{\sin\alpha}$$

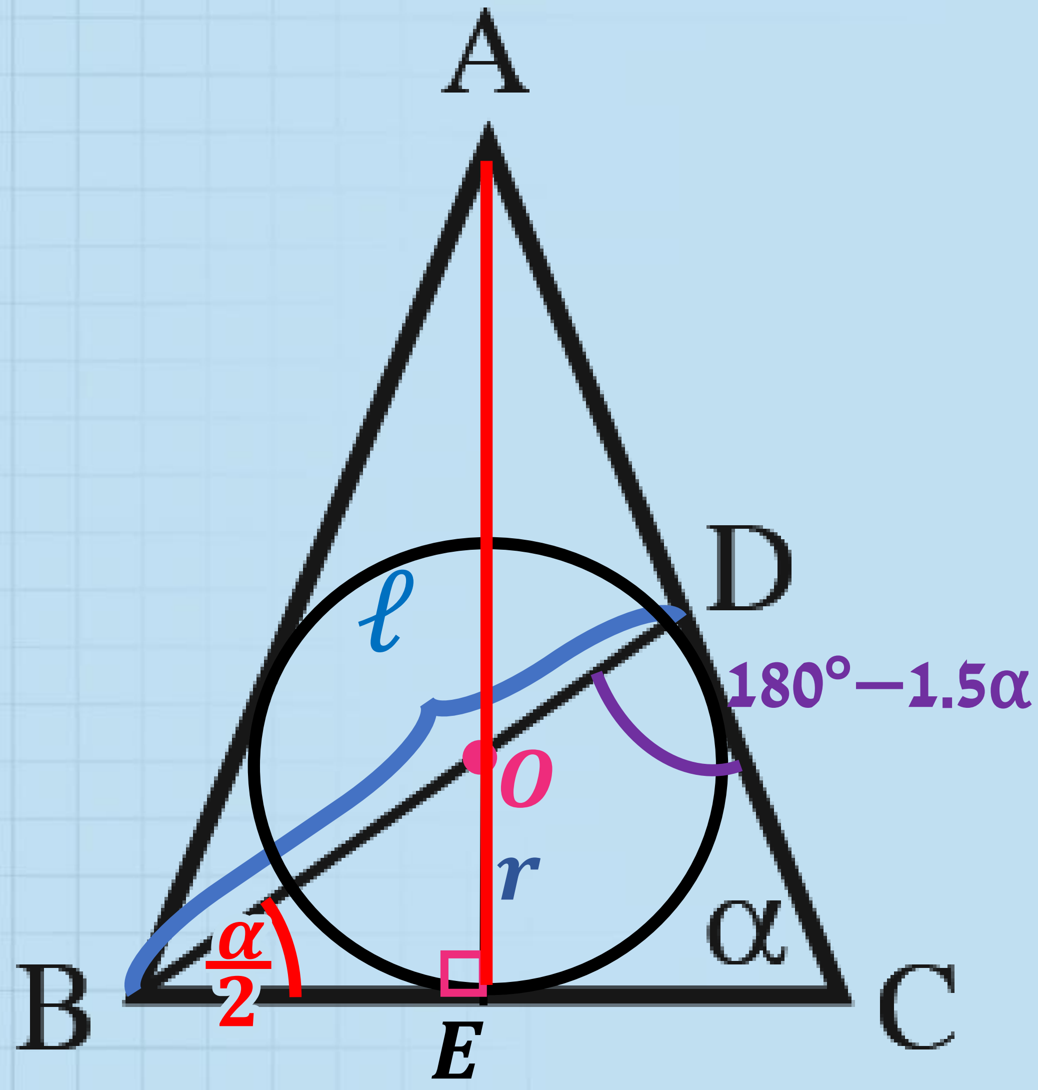
לפי הזהות $sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

$$BC = \frac{\ell\sin(1.5\alpha)}{\sin\alpha}$$

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\measuredangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון

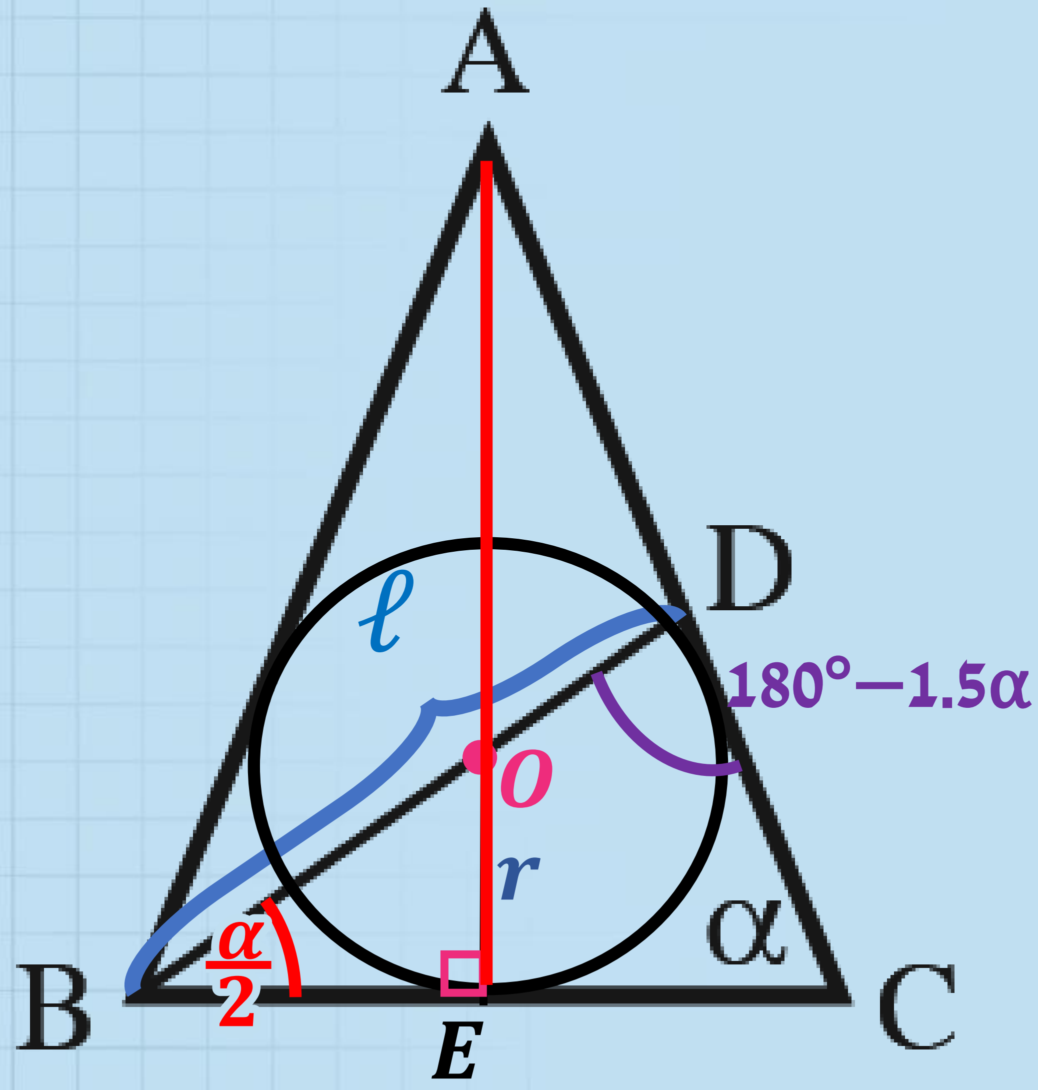


$$BE = \frac{BC}{2} = \frac{\frac{\ell\sin(1.5\alpha)}{\sin\alpha}}{2} = \frac{\ell\sin(1.5\alpha)}{2\sin\alpha}$$

BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.

א. הבע באמצעות ℓ ו-α את רדיוס המעגל החסום במשולש.

פתרון



ΔOEB ישו"ז:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{\frac{\ell\sin(1.5\alpha)}{2\sin\alpha}}$$

$$r=\frac{\ell\sin(1.5\alpha)\,tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha}$$

מ.ש.ל א'

43) BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC
שבו AB = AC. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$.
ב. הצב $\alpha = 60^\circ$ והבע את הרדיוס בעזרת ℓ.

פתרון

לפי סעיף א'

$$r = \frac{\ell \sin(1.5\alpha)\, tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\alpha}$$

נציב $\alpha = 60^\circ$

$$r = \frac{\ell \sin(1.5 \cdot 60^\circ)\, tg\left(\frac{60^\circ}{2}\right)}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\ell \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ell}{3}$$

מ.ש.ל ב'

43) BD הוא חוצה הזוית B במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $BD = \ell$. ג. מהי המשמעות הגיאומטרית של התוצאה שקיבלת?

פתרון

במש"צ, רדיוס המעגל החסום שווה ל- $\frac{1}{3}$ חוצה הזווית

נקודת מפגש חוצי זווית מתלכדת עם מפגש תיכונים

מ.ש.ל ג'

בהצלחה