פתרון תרגיל

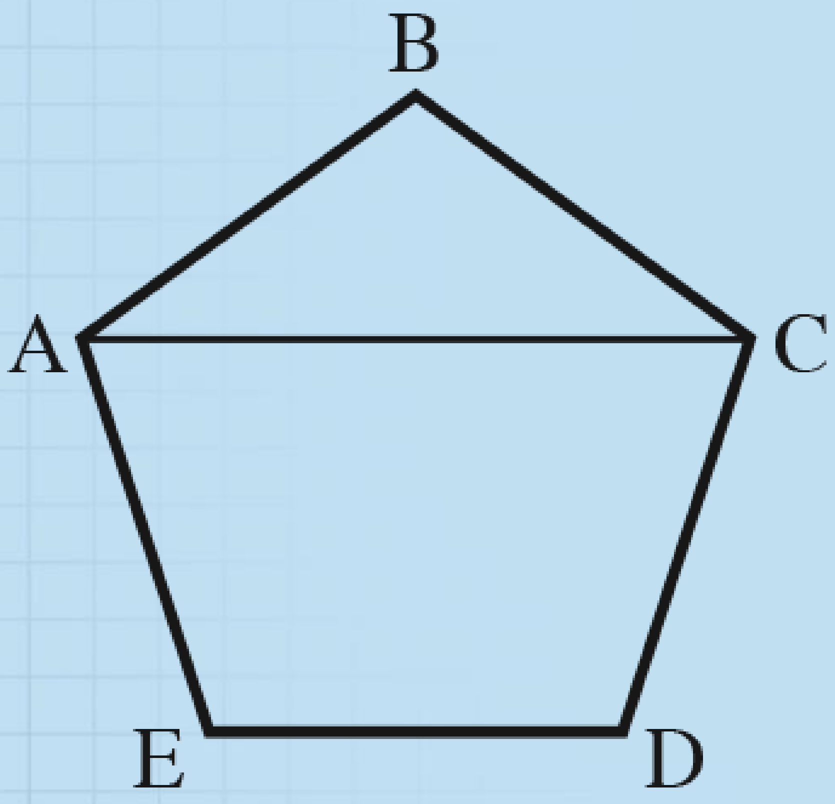
מעגל – בעיות שונות
(משולש ישר זוית – טריגונומטריה)

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 371, ת. 14

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



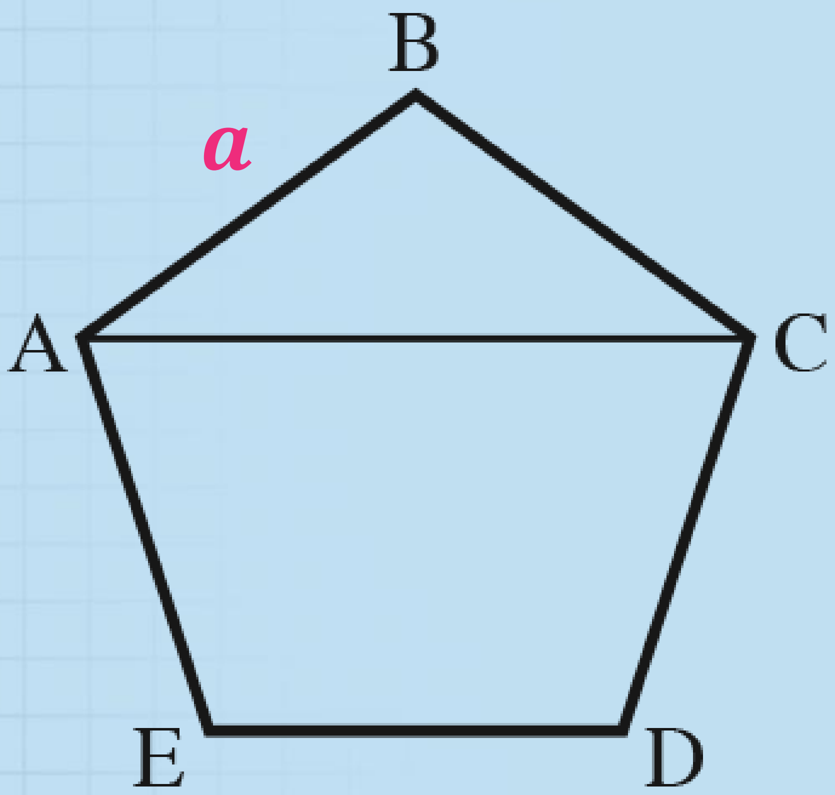
14) AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

(**הערה:** מותר להיעזר במחשבון).

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.
הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון



היחס המבוקש:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}}$$

$$S_{\Delta ABC} = ?$$

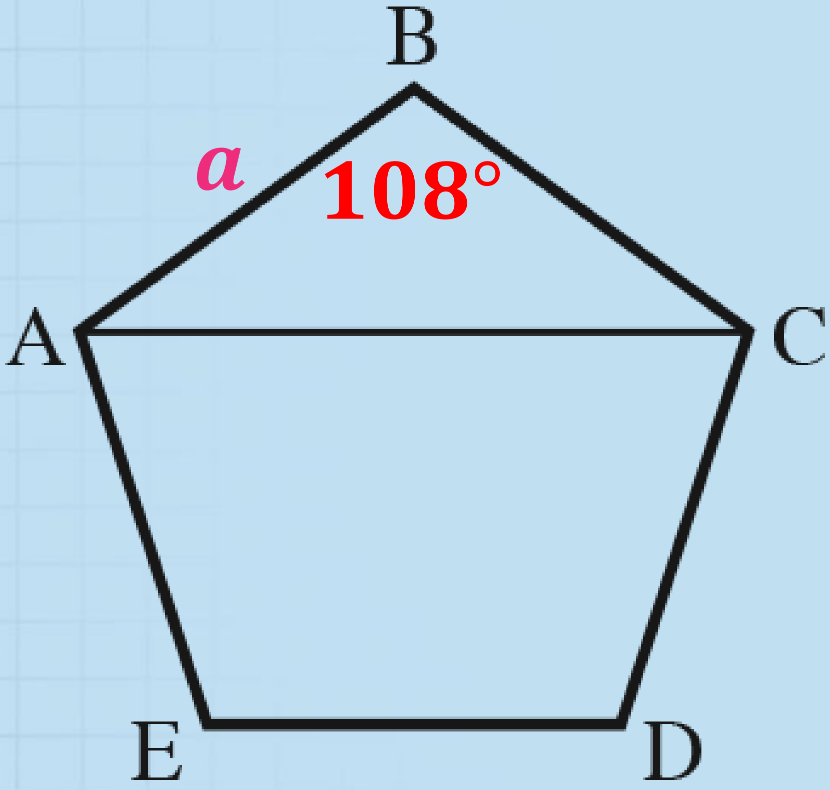
$$S_{ABCDE} = ?$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

$S_{\Delta ABC} = ?$

פתרון



לפי שטח משולש טריגונומטרי

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sin\sphericalangle ABC}{2}$$

סכום זוויות במחומש

$$180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$$

במחומש משוכלל כל הזוויות הפנימיות שוות

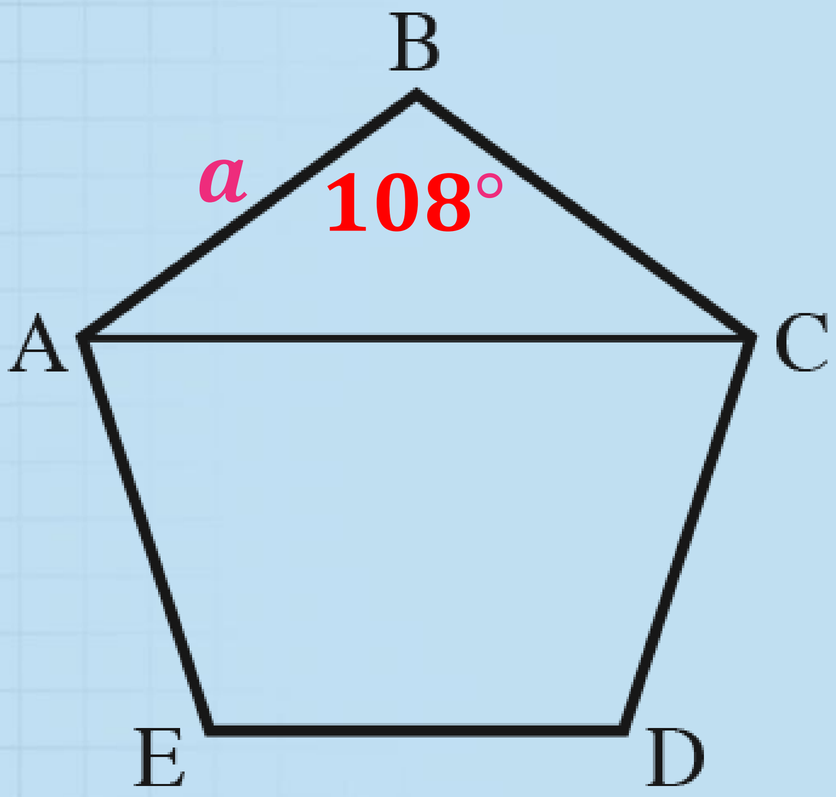
$$\sphericalangle ABC = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$S_{\Delta ABC} = ?$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון



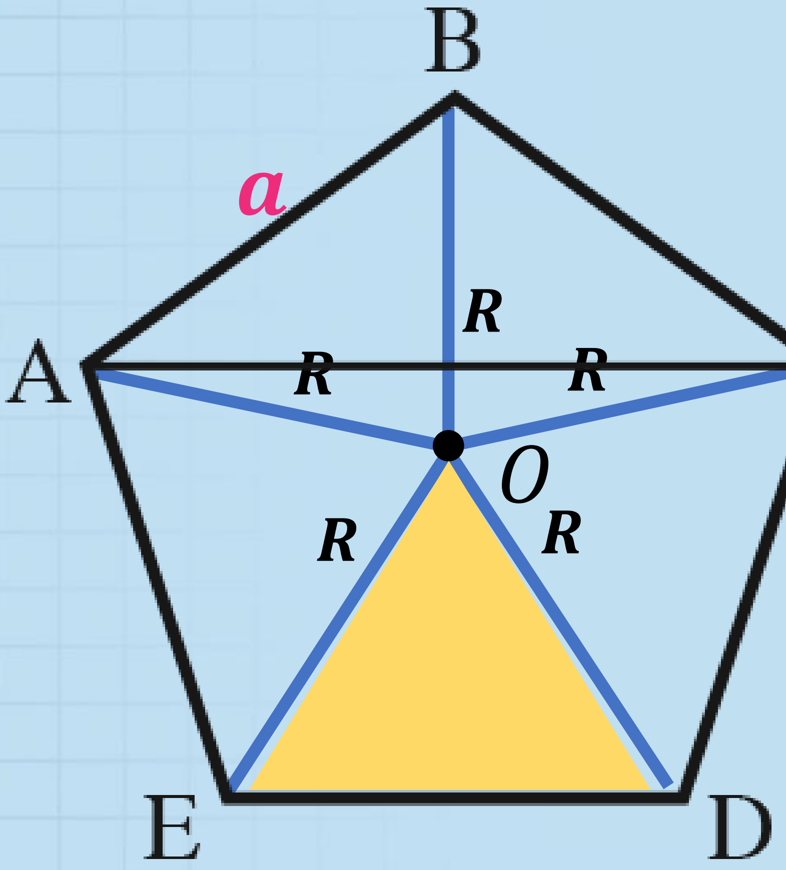
$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sin\measuredangle ABC}{2}$$

$$= \frac{a^2 \sin 108^\circ}{2}$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.
הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

$S_{\Delta ABCDE} = ?$

פתרון



$ABCDE$ מחומש משוכלל ולכן ניתן לחסום אותו במעגל.

נעביר רדיוסים אל קודקודי המחומש כך שניצור 5 מש"שים חופפים

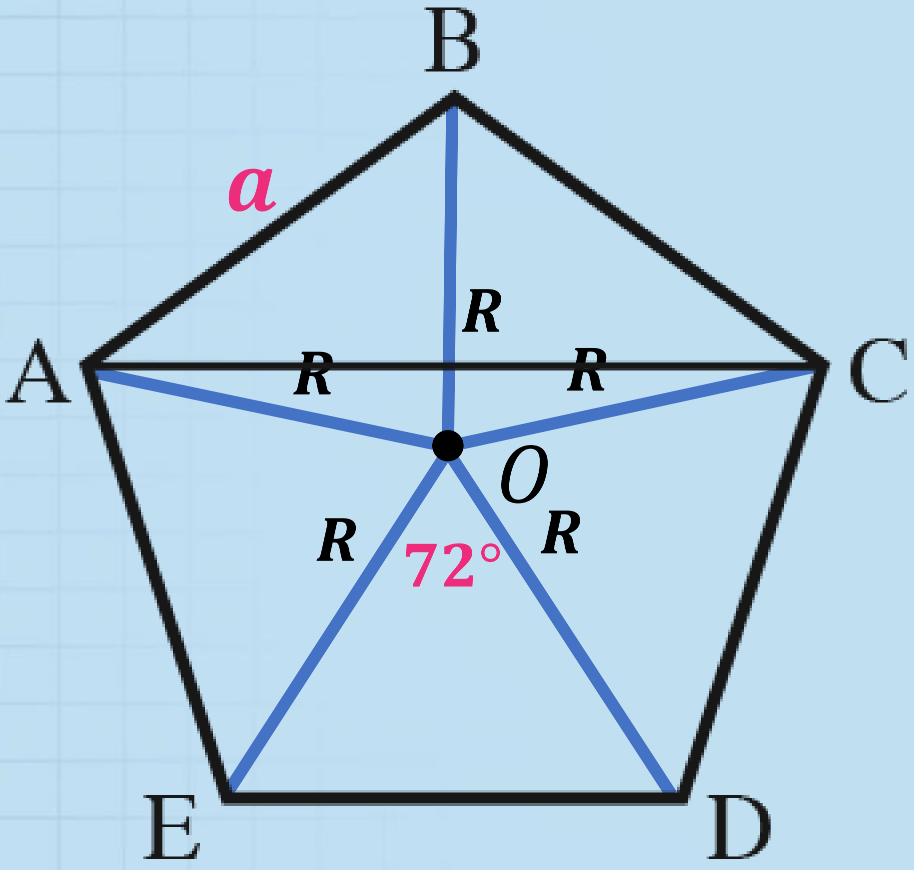
$$S_{ABCDE} = 5\Delta EOD$$

$S_{ABCDE} = ?$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון



לפי שטח משולש טריגונומטרי

$$S_{\Delta EOD} = \frac{R^2 \sin\measuredangle EOD}{2}$$

זווית הראש של כל מש"ש:

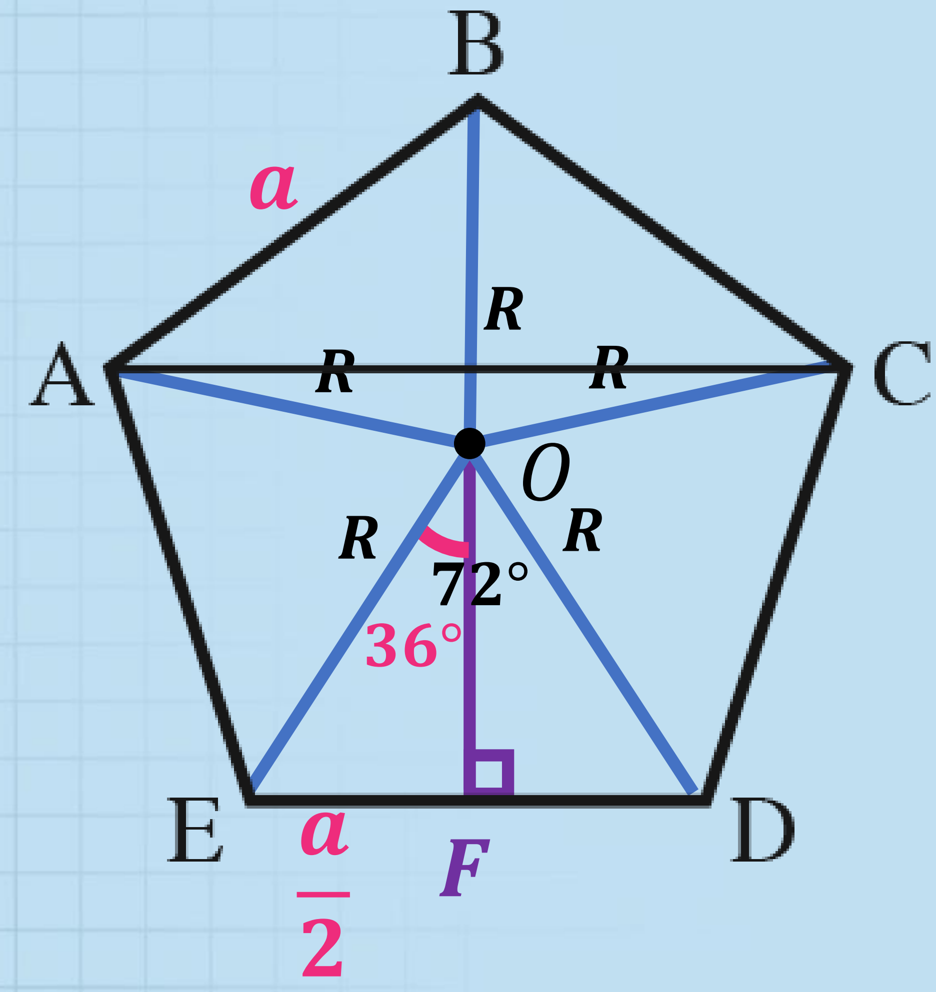
$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$S_{ABCDE} = ?$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון



בניית עזר - OF גובה ל- ED

OF ציר סימטריה במשולש ΔEOD

$$\measuredangle EOF = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

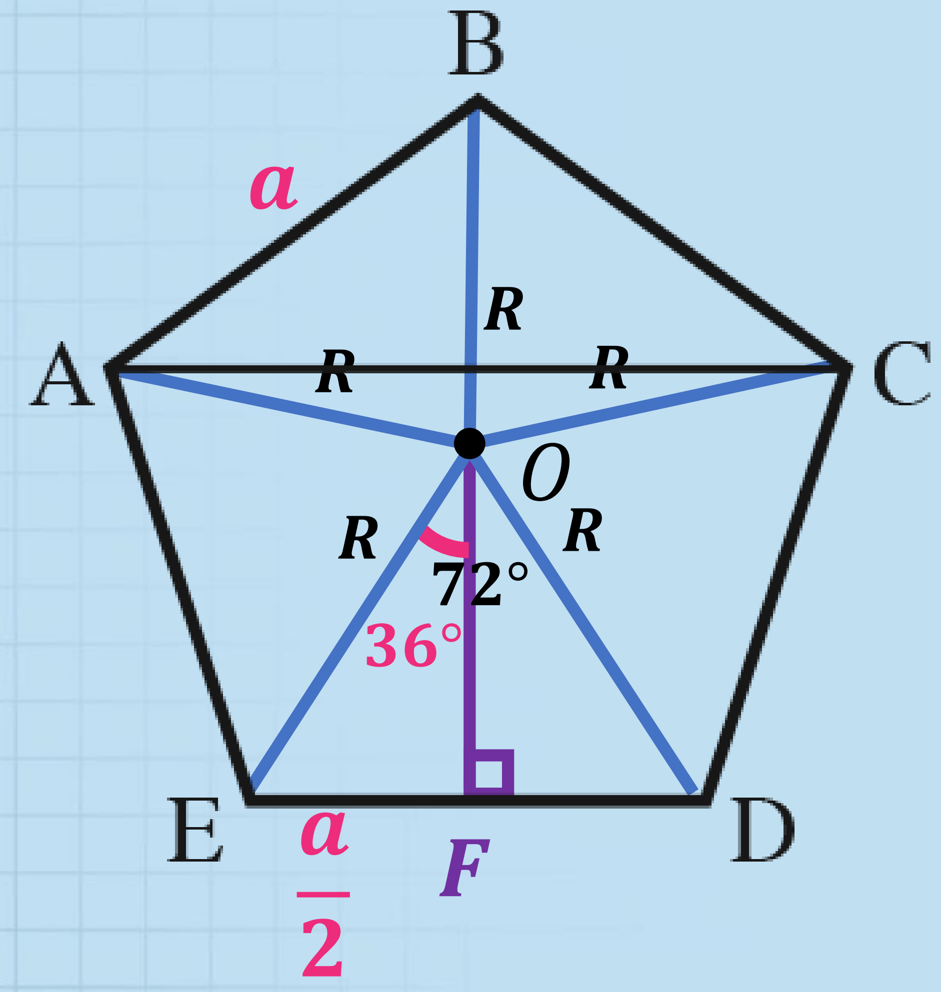
$$EF = \frac{a}{2}$$

$S_{ABCDE} = ?$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון



ΔEFO ישי"ז:

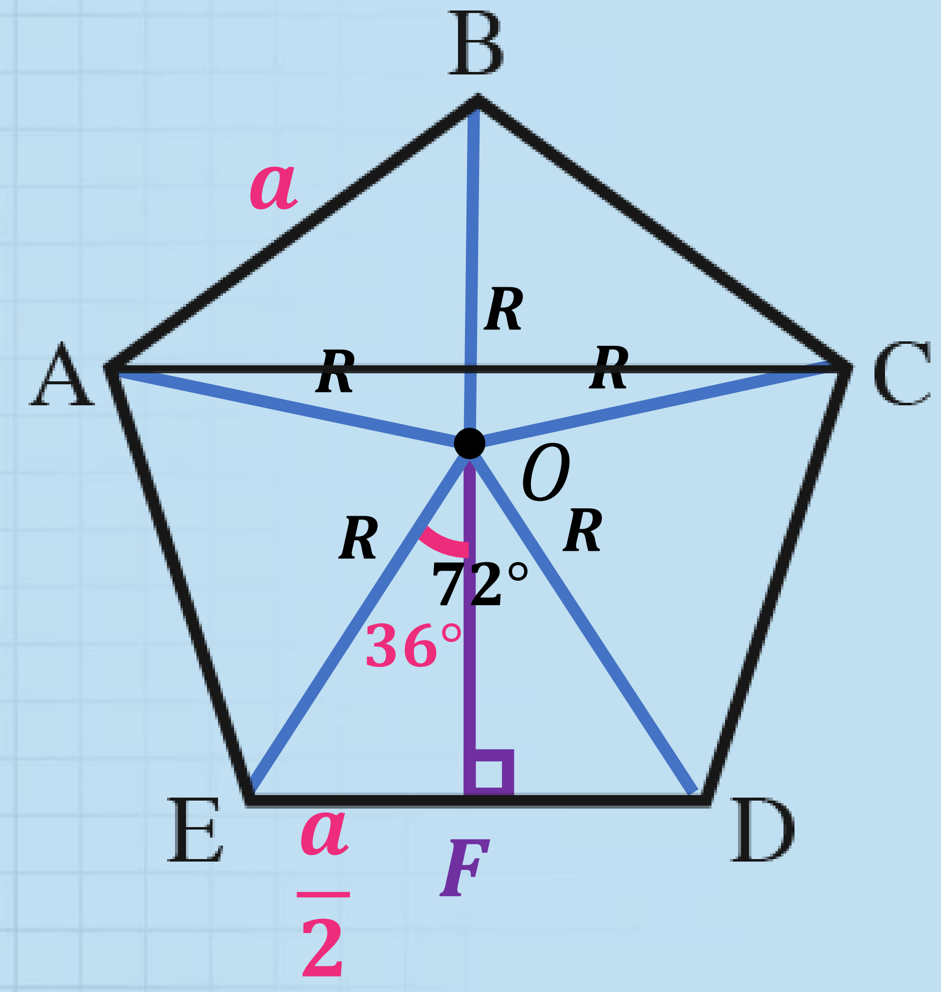
$$\sin 36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin 36^\circ}$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.
הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

$$S_{ABCDE}=?$$

פתרון



$$S_{\Delta EOD}=\frac{R^2\sin72^\circ}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2\sin36^\circ}\right)^2\sin72^\circ}{2}=\frac{a^2\sin72^\circ}{2\cdot4\cdot\sin^2 36^\circ}$$

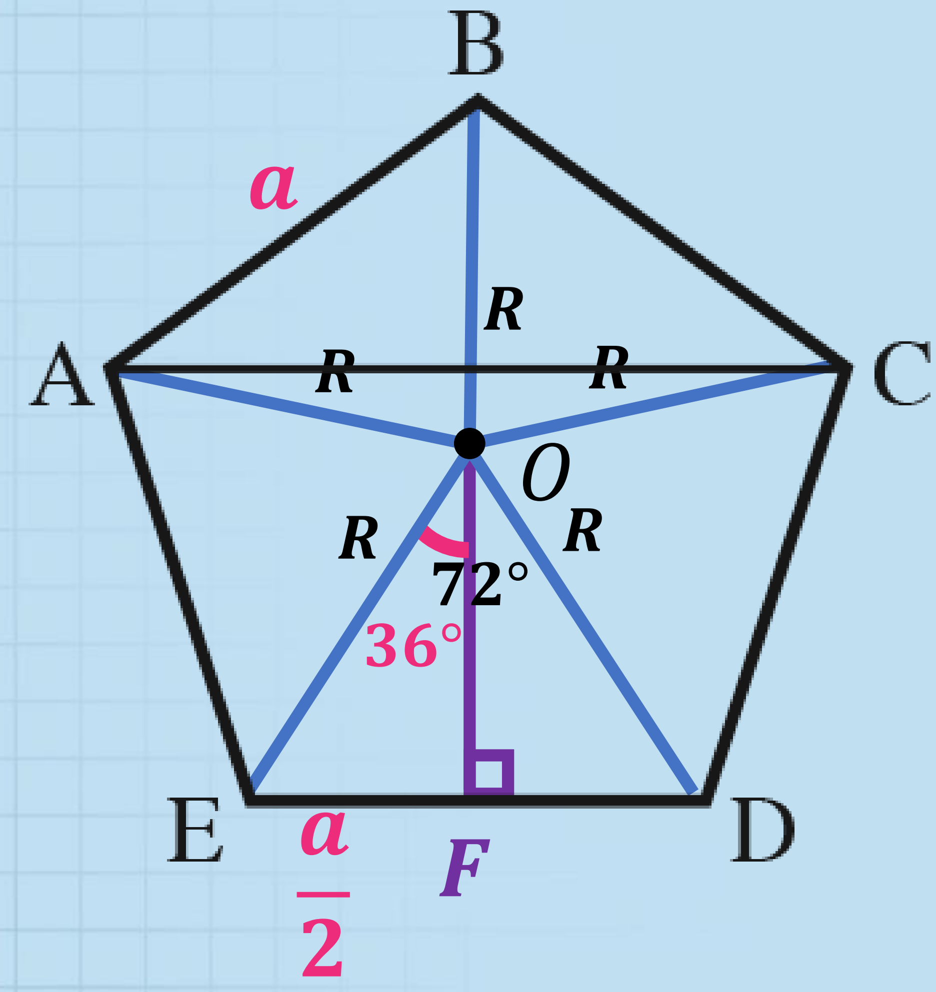
$$=\frac{a^2\sin72^\circ}{8\sin^2 36^\circ}$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

$S_{ABCDE} = ?$

פתרון



$$S_{ABCDE} = 5\Delta EOD$$

$$= \frac{5a^2 \sin 72^\circ}{8\sin^2 36^\circ}$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.

הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון

נציב את הביטויים שקיבלנו ביחס המבוקש:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}} = \frac{\frac{\cancel{a^2} \sin 108^\circ}{2}}{\frac{5\,\cancel{a^2}\sin 72^\circ}{8\sin^2 36^\circ}} = \frac{\cancel{\sin 108^\circ}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sin^2 36^\circ}{5\,\cancel{\sin 72^\circ}}$$

לפי הזהות $\boldsymbol{\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)}$:

$$\sin 108^\circ = \sin(180^\circ - 108^\circ) = \sin 72^\circ$$

AC הוא אלכסון במחומש המשוכלל ABCDE שאורך צלעו a.
הוכח: היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המחומש ABCDE הוא $\frac{4}{5}\sin^2 36^\circ$.

פתרון

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{ABCDE}} = \frac{4}{5}\ sin^2 36^\circ$$

מ.ש.ל

בהצלחה