פתרון תרגיל

חזקות עם מעריך טבעי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 81, ת. 66

המצגת נערכה ע"י ליאורה יוספזון

השאלה

חשב את הערך המספרי של הביטויים הבאים (n מספר טבעי):

66) $$\frac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$$

אסטרטגית פתרון:

- ננסה להגיע למצב בו הגורמים המכילים את n יתבטלו.
- ננסה להגיע למספר בסיסים שונים קטן ככל האפשר.
- מאחר ומדובר בתרגיל מורכב, נעבוד בנפרד על המונה או על המכנה תוך התבוננות מתמדת בחלק עליו אנחנו לא עובדים כרגע.

66) $\dfrac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$

פתרון

נתמקד תחילה במכנה

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1}) =$$

$$9(3^n \cdot 3^{-1} - 2^n)(3^n - 2^n \cdot 2^1) =$$

$$9\left(3^n \cdot \frac{1}{3} - 2^n\right)(3^n - 2 \cdot 2^n) =$$

$$9\left(\frac{3^n}{3} - 2^n\right)(3^n - 2 \cdot 2^n) =$$

$$\frac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$$ (66

פתרון

מכנה:

נפתח סוגריים:

$$9\left(\frac{3^n}{3} - 2^n\right)(3^n - 2\cdot 2^n) =$$

$$9(\frac{3^n\cdot 3^n}{3} - \frac{2}{3}\cdot 3^n\cdot 2^n - 2^n\cdot 3^n + 2\cdot 2^n\cdot 2^n) =$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$$

$$9(\frac{3^{n+n}}{3} - \frac{2}{3}\cdot(3\cdot 2)^n - (2\cdot 3)^n + 2\cdot 2^{n+n})$$

(66 $\dfrac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$

פתרון

מכנה:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$9(\frac{3^{n+n}}{3} - \frac{2}{3}\cdot(3\cdot 2)^n - (2\cdot 3)^n + 2\cdot 2^{n+n}) =$$

$$9\left(\frac{3^{2n}}{3} - \frac{2}{3}\cdot 6^n - 6^n + 2\cdot 2^{2n}\right) =$$

$$9\left(\frac{3^{2n}}{3} - 6^n(\frac{2}{3} + 1) + 2\cdot 2^{2n}\right) =$$

$$\frac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$$ (66

פתרון

מכנה:

$$9\left(\frac{3^{2n}}{3} - 6^n(\frac{2}{3} + 1) + 2 \cdot 2^{2n}\right) =$$

$$9\left(\frac{3^{2n}}{3} - \frac{5}{3} \cdot 6^n + 2 \cdot 2^{2n}\right) =$$

$$9\left(\frac{(3^2)^n}{3} - \frac{5 \cdot 6^n}{3} + 2 \cdot (2^2)^n\right)$$

$=$

(66 $\frac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$

פתרון

מכנה:

$$9\left(\frac{(3^2)^n}{3} - \frac{5\cdot 6^n}{3} + 2\cdot (2^2)^n\right) =$$

$$9\left(\frac{9^n}{3} - \frac{5\cdot 6^n}{3} + 2\cdot 4^n\right)$$

(66 $\dfrac{9^n-5\cdot6^n+6\cdot4^n}{9(3^{n-1}-2^n)(3^n-2^{n+1})}$

פתרון

מכנה: $9\left(\dfrac{9^n}{3}-\dfrac{5\cdot6^n}{3}+4^n\right)$

נחזור לצורת השבר השלמה:

$$\frac{9^n-5\cdot6^n+6\cdot4^n}{9\left(\frac{9^n}{3}-\frac{5\cdot6^n}{3}+2\cdot4^n\right)}$$

(66 $\dfrac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})}$

פתרון

מכנה: $9\left(\frac{9^n}{3} - \frac{5\cdot 6^n}{3} + 4^n\right)$

נחזור לצורת השבר השלמה:

$$\frac{9^n - 5\cdot 6^n + 6\cdot 4^n}{9\left(\frac{9^n}{3} - \frac{5\cdot 6^n}{3} + 2\cdot\frac{3}{3}\cdot 4^n\right)} =$$

(66 $\dfrac{9^n-5\cdot 6^n+6\cdot 4^n}{9(3^{n-1}-2^n)(3^n-2^{n+1})}$

פתרון

$$\frac{9^n-5\cdot 6^n+6\cdot 4^n}{9\left(\frac{9^n}{3}-\frac{5\cdot 6^n}{3}+2\cdot\frac{3}{3}\cdot 4^n\right)}=$$

$$\frac{\cancel{9^n-5\cdot 6^n+6\cdot 4^n}}{9\cdot\frac{1}{3}\cancel{(9^n-5\cdot 6^n+6\cdot 4^n)}}=\frac{1}{3}$$

בהצלחה