הקנייה

חזקות עם מעריך טבעי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 76–79

המצגת נערכה ע"י ליאורה יוספזון

הקנייה

הגדרת החזקה – אם a מספר כלשהו ו-n מספר טבעי אז a בחזקת n מוגדר באופן הבא:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{פעמים } n}}$$

בסיס החזקה

מעריך החזקה

פעולת החזקה קודמת לפעולת הכפל והחילוק

הקנייה

חוקי חזקות:

1. מכפלה של חזקות בעלות אותו בסיס:

מכפלה של שתי חזקות בעלות אותו בסיס שווה לחזקה בעלת אותו הבסיס שהמעריך שלה הוא סכום המעריכים של שתי החזקות המוכפלות.

בנוסחה:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5.}$$

הקנייה

חוקי חזקות:

2. מנה של חזקות בעלות אותו בסיס:

מנה של שתי חזקות בעלות אותו בסיס שווה לחזקה בעלת אותו הבסיס שהמעריך שלה הוא ההפרש שבין מעריך המונה למעריך המכנה.
(בשלב זה נניח שהמעריך של החזקה שבמונה יותר גדול מהמעריך של החזקה שבמכנה).

בנוסחה (נניח $n > m$):

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}} \quad (a \neq 0)$$

$$\boxed{\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5}$$

הקנייה

חוקי חזקות:

3. חזקה של חזקה:

חזקה של חזקה בעלת בסיס נתון שווה לחזקה של אותו הבסיס שהמעריך שלה הוא מכפלת המעריכים של שתי החזקות הקודמות.

בנוסחה:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$$

$$\boxed{(4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6}$$

הקנייה

חוקי חזקות:

4. חזקה של מכפלת שני בסיסים:

חזקה של מכפלת שני בסיסים שווה למכפלת החזקות בעלות אותו המעריך של שני הבסיסים.

בנוסחה:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$\boxed{(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3}$$

הקנייה

חוקי חזקות:

5. חזקה של מנת שני בסיסים:

חזקה של מנת שני בסיסים שווה למנת החזקות בעלות אותו המעריך של שני הבסיסים.

בנוסחה: $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ $(b \neq 0)$

$$\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}}$$

הקנייה

דוגמא א':

מצא מה גדול יותר:

(1) 9^{301} או 27^{200} (2) 5^{200} או 2^{500} (3) 5^{30} או $4 \cdot 5^{29}$

פתרונות:

(1) 9^{301} או 27^{200}

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

נביע את שני הבסיסים בעזרת **הבסיס המשותף** שהוא 3.

$$9^{301} = (3^2)^{301} = 3^{602}$$

$$27^{200} = (3^3)^{200} = 3^{600}$$

הקנייה

מצא מה גדול יותר: (1) 9^{301} או 27^{200}

פתרונות:

$9^{301} = 3^{602}$ $\qquad$ $.27^{200} = 3^{600}$

הבסיס 3 הוא **גדול מ-1** $\qquad$ $600 < 602$

$$\Downarrow$$

$$27^{200} < 9^{301}$$

הקנייה

הערה: כאשר הבסיס הוא **חיובי** קיימים הכללים הבאים (גם ההיפך נכון):

(I) אם הבסיס גדול מ-1 אז אי השוויון שבין המעריכים הוא באותו הכיוון של אי השוויון שבין החזקות.
(II) אם הבסיס בין 0 ל-1 אז אי השוויון שבין המעריכים הוא הפוך בכיוונו לאי השוויון שבין החזקות.

הקנייה

מצא מה גדול יותר: (2) 5^{200} או 2^{500}

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}}$$

פתרונות:

כאן הבסיסים הם 2 ו-5 ולא ניתן למצוא להם בסיס משותף לכן נתבונן במעריכים

$$5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$$

$$2^{500} = (2^5)^{100} = 32^{100}$$

$$32 > 25$$
$$\Downarrow$$
$$32^{100} > 25^{100}$$
$$\Downarrow$$
$$2^{500} > 5^{200}.$$

הקנייה

מצא מה גדול יותר: (3) 5^{30} או $4 \cdot 5^{29}$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

פתרונות:

$$5^{30} = 5^{1+29} = 5^1 \cdot 5^{29} = 5 \cdot 5^{29}.$$

$$4 < 5$$

$$\Downarrow$$

$$4 \cdot 5^{29} < 5 \cdot 5^{29}$$

$$\Downarrow$$

$$4 \cdot 5^{29} < 5^{30}$$

הקנייה

דוגמא ב':

חשב את הערך המספרי של הביטוי $\frac{3^{n+2}(3^n-2^n)}{9^n-6^n}$ (n הוא מספר טבעי).

פתרון:

נסתמך על חוקי החזקות, נשים לב שמתקיים $9^n=3^{2n}$ ונקבל:

$$\frac{3^{n+2}(3^n-2^n)}{9^n-6^n}=\frac{3^n\cdot 9(3^n-2^n)}{3^{2n}-6^n}=\frac{9(3^n\cdot 3^n-3^n\cdot 2^n)}{3^{2n}-6^n}=\frac{9(3^{2n}-6^n)}{3^{2n}-6^n}=9$$

כלומר לכל n טבעי ערך הביטוי הוא 9.

בהצלחה